LEHRBRIEFE FÜR DAS HOCHSCHULFERNSTUDIUM

HERAUSGEGEBEN
VON DER ZENTRALSTELLE FÜR DAS HOCHSCHULFERNSTUDIUM DES
MINISTERIUMS FÜR HOCH- UND FACHSCHULWESEN

SIGNALANALYSE

3. LEHRBRIEF

02 1471 03 1

SIGNALANALYSE

3. LEHRBRIEF

Verfaßt von
Prof. Dr.-Ing. habil. Wolfgang K r a a k
Technische Universität Dresden
Sektion Informationstechnik

02 1471 03 1

Redaktionsschluß: Dezember 1987

2. Ausgabe 1. Auflage

Best.-Nr. 02 1471 03 1 · Aufl. 700 · Veröffentlicht unter Ag 628/103/88 DDR

Verfaßt für die Zentralstelle für das Hochschulfernstudium des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen Dresden. Herausgegeben im Auftrag des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen der Deutschen Demokratischen Republik von der Zentralstelle für das Hochschulfernstudium des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen.

Gesamtherstellung: Polygrafischer Bereich des Wissenschaftlichen Informationszentrums der Bergakademie Freiberg

Inhaltsverzeichnis

		Seite
9.	Kennzeichnung von Signalen durch statistische Kenngrößen (Fortsetzung)	4
9.3.	Verteilungsdichtefunktionen, Verteilungsfunktionen, Mittelwerte	4
9.3.1.	Die erste Verteilungsdichtefunktion und die zugehörige Verteilungsfunktion	4
9.3.2.	Gaußsche Verteilung (Normalverteilung)	7
9.3.3.	Erwartungswerte, Mittelwerte	12
9.3.4.	Beispiele	13
9.3.5.	Mehrdimensionale Verteilungsdichtefunktionen ..	16
9.3.6.	Verbundwahrscheinlichkeit	18
9.3.7.	Aufgaben	18
10.	LPC-Analyse	18
10.1.	Einleitung	18
10.2.	Methode	20
10.2.1.	Autokorrelationsmethode	21
10.2.2.	Kovarianzmethode	22
10.3.	Zusammenhang mit Frequenzanalyse	23
10.4.	Analyse- und Synthesefilter	24
11.	Zufällige Fehler bei der Messung regelloser Signale	27
11.1.	Bestimmung der Streuung durch Mittelung über eine Zeit T	27
11.2.	Mittelung aus N diskreten Werten bei periodischer Probenentnahme	29
11.3.	Mittelung durch Integration mit Tiefpaßfiltern	30
11.4.	Anwendung auf Effektivwertmessung	33
12.	Aufgaben	35
Anhang		44
1. Beschreibung eines Zweitorsystems durch die Übertragungsfunktion		44
2. Beschreibung eines Zweitorsystems durch die Gewichtsfunktion		46
3. Lösung spezieller Integrale in der komplexen Ebene		50
4. Einführung in die statistische Entscheidungstheorie		53
Literatur		70

9. Kennzeichnung von Signalen durch statistische Kenngrößen (Fortsetzung)

9.3. Verteilungsdichtefunktionen, Verteilungsfunktionen, Mittelwerte

Bei regellosen Vorgängen lassen sich, auch wenn ihr Verhalten bis zu einem bestimmten Zeitpunkt genau bekannt ist, die zukünftigen Funktionswerte des Vorganges nicht genau voraussagen. Es können aber statistische Aussagen gemacht werden, so kann z. B. die Wahrscheinlichkeit dafür angegeben werden, daß der Funktionswert zwischen zwei Schranken liegt.

9.3.1. Die erste Verteilungsdichtefunktion und die zugehörige Verteilungsfunktion

Wir wollen nachfolgend, und das ist in der Anwendung so üblich, unter der Verteilungsdichtefunktion, wenn sie nicht ausdrücklich zusätzlich gekennzeichnet ist, immer die erste Verteilungsdichtefunktion verstehen. Das Entsprechende gilt für die Verteilungsfunktion.

Unter der Verteilungsdichtefunktion $p(x)$ wird eine Funktion verstanden, deren Wert an der Stelle x, multipliziert mit Δx, für genügend kleines Δx die Wahrscheinlichkeit ΔP für den Verlauf der Zeitfunktion im Bereich x bis $x + \Delta x$ angibt.

Nach Bild 9.6 befindet sich für eine Beobachtungszeit T die Zeitfunktion $x(t)$ mit einer Häufigkeit

$$\Delta H = \frac{\sum \Delta t_n}{T}$$

im Bereich x bis $x + \Delta x$. Es wird somit

$$p(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta H}{\Delta x} = \lim_{\substack{T \to \infty \\ \Delta x \to 0}} \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{\sum \Delta t_n}{T} .$$

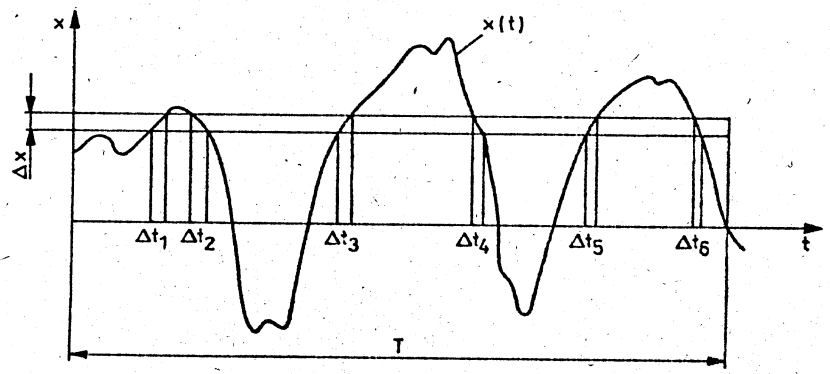


Bild 9.6 Verlauf einer regellosen Zeitfunktion x(t) im Bereich x bis x + Δx

Die Verteilungsfunktion P(x) gibt die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Funktionswerten der regellosen Zeitfunktion x(t) unterhalb einer Schranke x_o an, wenn $P(x_o)$ der Wert der Verteilungsfunktion an der Stelle x_o ist. Es gilt also:

$$P(x_o) \longrightarrow x(t) < x_o .$$

Es ist

$$\boxed{P(x) = \int_{-\infty}^{x} p(\xi)\, d\xi}$$

und

$$\boxed{p(x) = \frac{dP(x)}{dx} .}$$

Im Bild 9.7 sind für eine Zufallsfunktion die Verteilungsdichtefunktion p(x) und die Verteilungsfunktion P(x) dargestellt.

Bei technischen oder physikalischen Problemen können Zufallsfunktionen häufig nur in einem Bereich $x_{min} < x(t) < x_{max}$ auftreten. Es ist dann immer $P(x_{max}) = 1$. Der durch ein System bedingte maximale Grenzwert einer Zeitfunktion wird mit Sicherheit erreicht oder unterschritten. Unterhalb bzw. oberhalb der Grenzwerte x_{min} und x_{max} hat dann auch die Dichtefunktion den Wert Null. Bei technischen Problemen ist häufig die Frage von

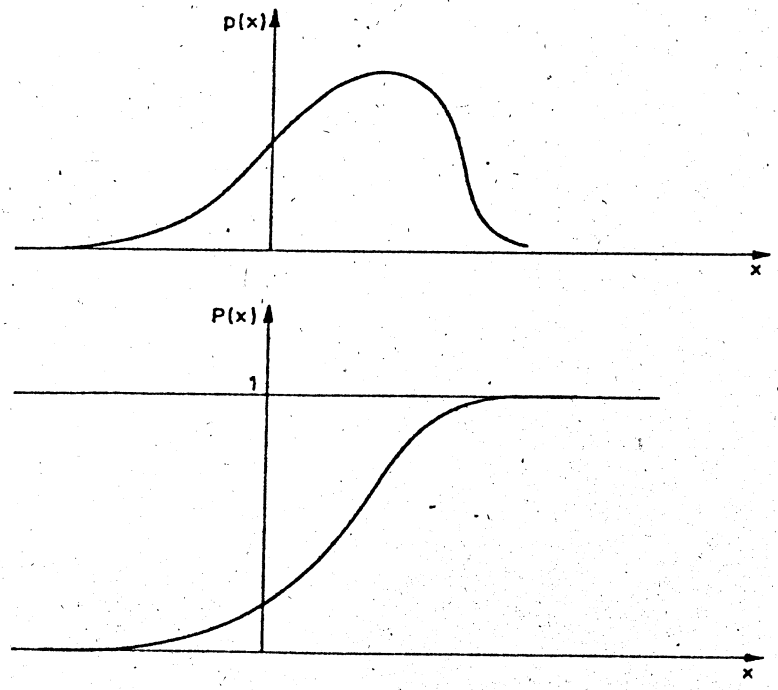


Bild 9.7 Schematische Darstellung einer Verteilungsdichtefunktion p(x) und der zugehörigen Verteilungsfunktion P(x)

Bedeutung, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß der Betrag des Funktionswertes einer regellosen Zeitfunktion einen Grenzwert nicht überschreitet. Zum Beispiel darf die Spannung in mechanischen Teilen bestimmte Grenzwerte nicht überschreiten, damit kein Bruch eintritt.

Es ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Betrag des Funktionswertes einen Grenzwert unterschreitet

$$P(|x| < x_g) = P(x_g) - P(-x_g) = \int_{-x_g}^{+x_g} p(x)\,dx$$

und daß er ihn überschreitet

$$P(|x| > x_g) = P(-x_g) + 1 - P(x_g). \qquad (9.9)$$

Für Zufallsfunktionen, deren zeitlicher Mittelwert Null ist, mit im übrigen beliebigen Verteilungsfunktionen, gilt die etwas vereinfachte Tschebyscheffsche Ungleichung (Wunsch (1970), Fisz (1966)):

$$\boxed{P(|x| \geq k\,\tilde{x}) \leq \frac{1}{k^2} \quad \text{für } \overline{x(t)} = 0.}$$

Zum Beispiel wird also der zehnfache Wert des Effektivwertes vom Betrag des Momentanwertes höchstens in Zeitabschnitten überschritten, deren Summe kleiner ist als 1 % einer langen Beobachtungszeit.

9.3.2. Gaußsche Verteilung (Normalverteilung)

Es gibt eine Reihe von Verteilungsfunktionen, die technische Bedeutung besitzen. Die wichtigste von ihnen, weil näherungsweise am häufigsten vorkommend, ist die Gaußsche Verteilung oder Normalverteilung.

Eine normalverteilte Zufallsfunktion x(t) hat einen Verlauf der Verteilungsdichtefunktion

$$\boxed{p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma^2}}.}$$

Hierbei ist $\bar{x}$ der zeitliche Mittelwert und σ die Standardabweichung oder Streuung der Zufallsfunktion x(t):

$$\sigma^2 = \overline{(x-\bar{x})^2}.$$

Für $\bar{x} = 0$ ist die Standardabweichung identisch mit dem Effektivwert, und es wird

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\tilde{x}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\tilde{x}}\right)^2}. \qquad (9.10)$$

Die Gaußsche Glockenkurve nach Gl. (9.10) ist symmetrisch zur Ordinatenachse ($x = 0$) und hat hier ihr Maximum. Kleine Beträge der Zufallsfunktion treten also mit der größten Wahrscheinlichkeit auf, dagegen Funktionswerte bei $\left|\frac{x}{\sigma_x}\right| \gg 1$ nur mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit.

Bild 9.8 zeigt Dichte- und Verteilungsfunktion der Normalverteilung.

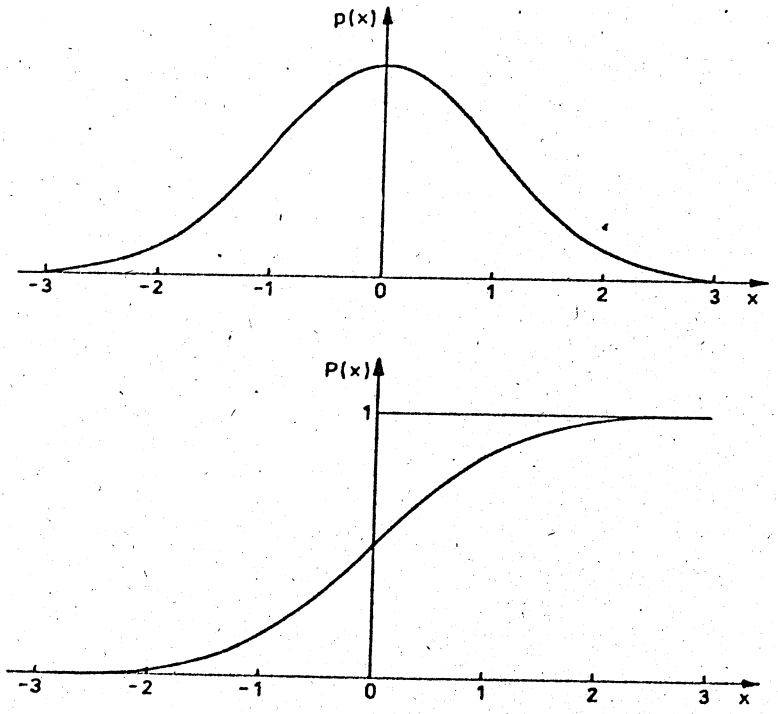


Bild 9.8 Verteilungsdichtefunktion und Verteilungsfunktion für die Normalverteilung bei $\bar{x} = 0$ und $\sigma = 1$

In den Tafeln 9.1 und 9.2 sind Zahlenwerte für Dichte- und Verteilungsfunktion der Normalverteilung angegeben. Es sind hierbei $\bar{x} = 0$ und $\sigma = 1$ gesetzt worden. Beispiel 1 am Ende dieses Abschnittes gibt Hinweise für die Anwendung der Tafeln.

Tafel 9.1 Normalverteilung, Werte der Verteilungsdichtefunktion

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

x	p(x)	x	p(x)	x	p(x)
0,00	0,3989	0,50	0,3521	1,00	0,2420
0,05	0,3984	0,55	0,3429	1,05	0,2299
0,10	0,3970	0,60	0,3332	1,10	0,2179
0,15	0,3945	0,65	0,3230	1,15	0,2059
0,20	0,3910	0,70	0,3123	1,20	0,1942
0,25	0,3867	0,75	0,3011	1,25	0,1826
0,30	0,3814	0,80	0,2897	1,30	0,1714
0,35	0,3752	0,85	0,2780	1,35	0,1604
0,40	0,3683	0,90	0,2661	1,40	0,1497
0,45	0,3605	0,95	0,2541	1,45	0,1394
1,50	0,1295	2,00	0,0540	2,50	0,0175
1,55	0,1200	2,05	0,0488	2,55	0,0154
1,60	0,1109	2,10	0,0440	2,60	0,0136
1,65	0,1023	2,15	0,0396	2,65	0,0119
1,70	0,0940	2,20	0,0355	2,70	0,0104
1,75	0,0863	2,25	0,0317	2,75	0,0091
1,80	0,0790	2,30	0,0283	2,80	0,0079
1,85	0,0721	2,35	0,0252	2,85	0,0069
1,90	0,0656	2,40	0,0224	2,90	0,0060
1,95	0,0596	2,45	0,0198	2,95	0,0051
				3,00	0,0044

Tafel 9.2 Normalverteilung, Werte der Verteilungsfunktion

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \, d\xi$$

x	P(x)	x	P(x)	x	P(x)
0,00	0,500000	0,50	0,691463	1,00	0,841345
0,05	0,519939	0,55	0,708840	1,05	0,853141
0,10	0,539828	0,60	0,725747	1,10	0,864334
0,15	0,559618	0,65	0,742154	1,15	0,874928
0,20	0,579260	0,70	0,758036	1,20	0,884930
0,25	0,598706	0,75	0,773373	1,25	0,894350
0,30	0,617911	0,80	0,788145	1,30	0,903200
0,35	0,636831	0,85	0,802338	1,35	0,911492
0,40	0,655422	0,90	0,815940	1,40	0,919243
0,45	0,673645	0,95	0,828944	1,45	0,926471
1,50	0,933193	2,00	0,977250	2,50	0,993790
1,55	0,939429	2,05	0,979818	2,55	0,994614
1,60	0,945201	2,10	0,982136	2,60	0,995339
1,65	0,950528	2,15	0,984222	2,65	0,995975
1,70	0,955434	2,20	0,986097	2,70	0,996533
1,75	0,959941	2,25	0,987776	2,75	0,997020
1,80	0,964070	2,30	0,989276	2,80	0,997445
1,85	0,967843	2,35	0,990613	2,85	0,997814
1,90	0,971283	2,40	0,991802	2,90	0,998134
1,95	0,974412	2,45	0,992857	2,95	0,998411
				3,00	0,998650

Aus Gl. (9.9) folgt für die symmetrische Normalverteilung ($\bar{x} = 0$)

$$P(|x| > x_g) = 2\,P(-x_g).$$

Dann ergibt sich aus Tafel 9.2 für $\bar{x} = 0$:

$$P(|x| > \tilde{x}) \approx 0{,}3173,$$
$$P(|x| > 2\,\tilde{x}) \approx 0{,}0455,$$
$$P(|x| > 3\,\tilde{x}) \approx 0{,}0027.$$

Bei normalverteilten Zufallsfunktionen wird also der dreifache Wert des Effektivwertes nur sehr selten überschritten, bei einer Wahrscheinlichkeit von 0,0027 in Zeitabschnitten von insgesamt 0,27 % der Beobachtungszeit.

Wenden wir die Tschebyscheffsche Ungleichung auf den letzten Fall an, so erhalten wir bei beliebiger Verteilungsfunktion

$$P(|x| \geq 3\,\tilde{x}) \leq \frac{1}{9} \approx 11\ \%,$$

also eine etwa 40fach größere Wahrscheinlichkeit als bei Normalverteilung.

Bei der Einschätzung einer Verteilungsfunktion als Normalverteilung und der daraus zu ziehenden Schlußfolgerungen ist also Vorsicht angebracht. Extremwerte können bei anderen Verteilungsfunktionen wesentlich häufiger auftreten.

Zur Beurteilung, ob ein Vorgang normalverteilt ist, steht nach einer Messung nur eine begrenzte Anzahl von Meßwerten zur Verfügung, die in der Statistik als Stichprobe bezeichnet wird. Bei zahlreichen Messungen handelt es sich dabei um im statistischen Sinne kleine Stichproben. Es sind verhältnismäßig einfache graphische und rechnerische Methoden bekannt, mit denen für solche kleine Stichproben die Normalverteilung geprüft werden kann (solche Methoden sind z. B. bei Fisz (1966), Storm (1967) und Weber (1967) angegeben).

9.3.3. Erwartungswerte, Mittelwerte

Zur einfachen Kennzeichnung von regellosen Signalen werden diskrete Kennzahlen verwendet: die Mittelwerte oder Erwartungswerte der Funktion f(x).

Man definiert als Erwartungswert der Funktion f(x)

$$\boxed{E[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, p(x)\, dx.} \qquad (9.11)$$

Die wichtigsten Erwartungswerte sind:

linearer Mittelwert (f(x) = x):

$$\boxed{E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\, dx,}$$

quadratischer Mittelwert ($f(x) = x^2$):

$$\boxed{E[x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, p(x)\, dx.}$$

Außerdem wird zur Kennzeichnung der Varianz oder Dispersion σ^2 verwendet:

$$\sigma^2 = E\left[(x - E[x])^2\right] = E\left[x^2 - 2\,x\,E[x] + (E[x])^2\right]$$
$$= E[x^2] - 2\,E[x]\,E[x] + (E[x])^2,$$

$$\boxed{\sigma^2 = E[x^2] - (E[x])^2.}$$

Die Wurzel aus der Varianz σ^2 ist dann die in der Meßtechnik viel verwendete Standardabweichung σ.

In Beispiel 2 am Ende dieses Abschnittes ist die Berechnung der Erwartungswerte an einer dreieckförmigen Dichtefunktion vorgeführt.

Bei den im physikalischen Geschehen vorkommenden Zufallsfunktionen können, wie bei allen ergodischen Funktionen, die Mittelwerte nach Gl. (9.11) auch als zeitliche Mittelwerte bestimmt werden. Es gilt:

linearer Mittelwert $$E[x] = \overline{x(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)\,dt,$$

quadratischer Mittelwert $$E[x^2] = \overline{x^2(t)} = \tilde{x}^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x^2(t)\,dt,$$

Varianz $$\sigma^2 = \overline{(x - \bar{x})^2} = \tilde{x}^2 - \bar{x}^2.$$

9.3.4. Beispiele

Beispiel 1. Anwendung der Tafeln 9.1 und 9.2

Ein normalverteilter Spannungsverlauf habe den Mittelwert $\bar{u} = 3$ V und den Effektivwert $\tilde{u} = 5$ V.

Gesucht ist: $p(5\text{ V})$, $P(5\text{ V})$, $P(u \geq 5\text{ V})$, $P(0\text{ V})$.

Es ist $\sigma^2 = \tilde{u}^2 - \bar{u}^2 = 25\text{ V}^2 - 9\text{ V}^2 = 16\text{ V}^2$,

$\sigma = 4$ V.

Mit den Werten der Tafeln 9.1 und 9.2 wird

$$p(u) = \frac{p(x)}{\sigma}, \quad P(u) = P(x), \quad x = \frac{u - \bar{u}}{\sigma}.$$

Für $u = 5$ V wird $x = 0{,}5$ und somit

$$\underline{p(5\text{ V}) = 0{,}088\text{ V}^{-1}},$$

$$\underline{P(5\text{ V}) = 0{,}6915}.$$

Mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $p(5\ V) = 0{,}088\ V^{-1}$ ist zum Beispiel die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Momentanwerten eines normalverteilten Spannungsverlaufs $u(t)$ mit dem Mittelwert $\bar{u} = 3$ V und dem Effektivwert $\tilde{u} = 5$ V im Bereich $4{,}5\ V \leqq u(t) \leqq 5{,}5\ V$

$$P(4{,}5\ V \leqq u \leqq 5{,}5\ V) \approx p(5\ V) \cdot 1\ V = 0{,}088 = 8{,}8\ \%.$$

Die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Spannungswerten $u(t) < 5$ V ist

$$P(5\ V) = P(u < 5\ V) = 0{,}6915 \approx 69\ \%.$$

Es ist dann weiter

$$\underline{P(u \geqq 5\ V) = 1 - P(u < 5\ V) = 0{,}3085}.$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Spannungswerten $u(t) \geqq 5$ V beträgt somit $0{,}3085 \approx 31\ \%$.

Für $u = 0$ V ist $x = -0{,}75$.

Wegen der Symmetrie der Verteilungsdichtefunktion ist $p(-x) = p(x)$ und $P(-x) = 1 - P(x)$.

Somit wird

$$\underline{P(0\ V) = P(u < 0\ V) = 0{,}2266}.$$

Beispiel 2

Eine Zufallsfunktion hat eine dreieckförmige Dichtefunktion nach Bild 9.9a.

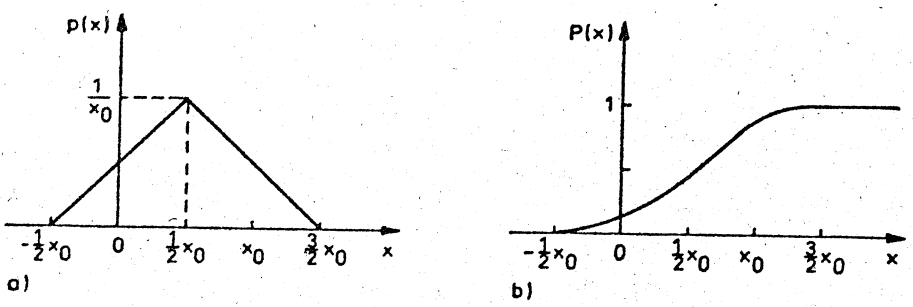


Bild 9.9 Dreieckförmige Dichtefunktion (a) und zugehörige Verteilungsfunktion (b)

Aus Bild 9.9a ergibt sich:

1. $x < -\frac{1}{2} x_0 \longrightarrow p(x) = 0; \quad \underline{P(x) = 0}.$

2. $-\frac{1}{2} x_0 \leq x \leq \frac{1}{2} x_0 \longrightarrow p(x) = \frac{1}{2 x_0} + \frac{1}{x_0^2} x,$

$$P(x) = \int_{-\frac{1}{2} x_0}^{x} \left(\frac{1}{2 x_0} + \frac{1}{x_0^2} \xi\right) d\xi,$$

$$\underline{P(x) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x_0}\right)^2}.$$

3. $\frac{1}{2} x_0 < x \leq \frac{3}{2} x_0 \longrightarrow p(x) = \frac{3}{2 x_0} - \frac{1}{x_0^2} x,$

$$P(x) = \frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2} x_0}^{x} \left(\frac{3}{2 x_0} - \frac{1}{x_0^2} \xi\right) d\xi,$$

$$\underline{P(x) = -\frac{1}{8} + \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{x_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x_0}\right)^2}.$$

4. $x > \frac{3}{2} x_0 \longrightarrow p(x) = 0; \quad \underline{P(x) = 1}.$

Die berechnete Verteilungsfunktion ist im Bild 9.9b aufgetragen.

Linearer Mittelwert:

$$\underline{E[x]} = \int_{-\frac{1}{2} x_0}^{+\frac{1}{2} x_0} \left(\frac{1}{2 x_0} x + \frac{1}{x_0^2} x^2\right) dx \int_{+\frac{1}{2} x_0}^{\frac{3}{2} x_0} \left(\frac{3}{2 x_0} x - \frac{1}{x_0^2} x^2\right) dx$$

$$= \underline{\frac{x_0}{2}}.$$

Den linearen Mittelwert hätten wir ohne Rechnung Bild 9.9a entnehmen können.

Quadratischer Mittelwert:

$$\underline{E[x^2]} = \int_{-\frac{1}{2}x_0}^{+\frac{1}{2}x_0} \left(\frac{1}{2x_0}x^2 + \frac{1}{x_0^2}x^3\right) dx + \int_{\frac{1}{2}x_0}^{\frac{3}{2}x_0} \left(\frac{3}{2x_0}x^2 - \frac{1}{x_0^2}x^3\right) dx$$

$$= \underline{\frac{5}{12}x_0^2}.$$

Standardabweichung:

$$\sigma^2 = E[x^2] - (E[x])^2 = \frac{5}{12}x_0^2 - \frac{x_0^2}{4} = \frac{1}{6}x_0^2 ,$$

$$\underline{\sigma = \frac{x_0}{\sqrt{6}}} .$$

9.3.5. Mehrdimensionale Verteilungsdichtefunktionen

Die erste Verteilungsdichtefunktion liefert keine Aussage darüber, ob sich ein Vorgang mit der Zeit schnell oder langsam ändert. Hierüber informieren die höheren Verteilungsdichtefunktionen.

So gibt die zweite Verteilungsdichtefunktion $p(x_1, x_2; t_1, t_2)$, multipliziert mit $\Delta x_1 \ \Delta x_2$, an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ΔP der Momentanwert $x(t)$ zur Zeit $t = t_1$ zwischen x_1 und $x_1 + \Delta x_1$ liegt und τ Zeiteinheiten später, also zur Zeit $t_2 = t_1 + \tau$, zwischen x_2 und $x_2 + \Delta x_2$ (siehe Bild 9.10):

$$\Delta P\{x_1 < x(t_1) \leq x_1 + \Delta x_1;\ x_2 < x(t_1 + \tau) \leq x_2 + \Delta x_2\}$$
$$\approx p(x_1, x_2; t_1, t_2)\ \Delta x_1\ \Delta x_2.$$

Für $\Delta x_1 \longrightarrow 0$ und $\Delta x_2 \longrightarrow 0$ wird

$$p(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1\, \partial x_2} P(x_1, x_2; t_1, t_2).$$

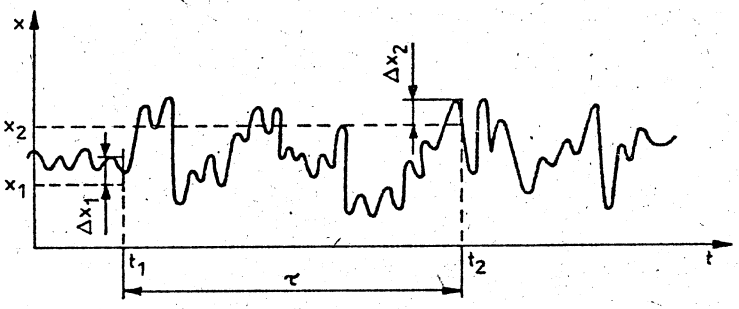


Bild 9.10 Bezeichnungen zur Erläuterung der zweiten Verteilungsdichtefunktion

Bei stationären Vorgängen hängt die zweite Verteilungsdichtefunktion nicht von t_1 und t_2, sondern nur von der Differenz $\tau = t_2 - t_1$ ab:

$$p = p(x_1, x_2; \tau).$$

Bei sich schnell verändernden Vorgängen (hohe Frequenzanteile) wird $p(\tau)$ mit zunehmendem τ schnell verschwinden; bei sich langsam verändernden Vorgängen (vorwiegend niederfrequente Anteile) dagegen langsam. Die zweite Verteilungsdichtefunktion informiert also über die innere Struktur des Vorganges. Entsprechend, wie die zweite, lassen sich höhere Verteilungsdichtefunktionen definieren. Die Gesamtheit aller Verteilungsdichtefunktionen beschreibt ein stationäres, regelloses Signal vollständig. Für die Mehrzahl der technischen Anwendungen, in denen höhere Verteilungsdichtefunktionen als die erste ermittelt wurden, beschränkt man sich auf die Kenntnis der ersten und zweiten Verteilungsdichtefunktion.

Für mehrdimensionale Verteilungsdichtefunktionen können auch Erwartungswerte angegeben werden: $E\left[f(x(t_1), x(t_2), \ldots)\right]$. Von Interesse ist im allgemeinen nur

$$E[x(t)\, x(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x(t+\tau)\, p\{x(t), x(t+\tau)\}\, dx(t)\, dx(t+\tau) = \underline{\psi_{xx}(\tau)}.$$

Der interessierende Erwartungswert ist also identisch mit der Autokorrelationsfunktion.
Für einen stationären Vorgang ist $\varphi_{xx}(\tau)$ unabhängig von t.

9.3.6. Verbundwahrscheinlichkeit

Ähnlich wie die Kreuzkorrelationsfunktion, geben Verbundwahrscheinlichkeiten innere Zusammenhänge zwischen zwei Zeitfunktionen x(t) und y(t) zu verschiedenen Zeiten an.
Es ist:

$$\Delta P(x < x(t_1) \leqq x + \Delta x;\ y < y(t_1 + \tau) \leqq y + \Delta y) \approx p(x, y, \tau)\ \Delta x \Delta y,$$

$$p(x, y, \tau) = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} P(x, y; \tau).$$

Für den Erwartungswert gilt:

$$\underline{E[x(t)\ y(t + \tau)]} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ y(t + \tau)\ p[x(t),\ y(t + \tau)]\ dx(t)\ dy(t + \tau) = \underline{\varphi_{xy}(\tau)}.$$

Der Erwartungswert ist also hier identisch mit der Kreuzkorrelationsfunktion.

9.3.7. Aufgaben

Lösen Sie die Aufgaben 13 bis 16.

10. LPC-Analyse

10.1. Einleitung

In den 60iger Jahren wurde ein Kodierungsverfahren entwickelt, um Signale von Raumsonden zur Bodenstation mit geringem Informationsfluß und sicher gegen Störeinflüsse übertragen zu können

(Naumburger (1987)). Dieses Verfahren wurde "Linear Predictive Coding - LPC" (Kodierung durch lineare Vorhersage) genannt. Es hat inzwischen vielseitige Anwendung gefunden, insbesondere bei der Sprachanalyse und der Sprachsynthese.

Das Wesen der LPC-Analyse besteht darin, die Abtastwerte eines Signals aus einer Linearkombination vorangegangener Abtastwerte zu approximieren. Die Koeffizienten der Linearkombination werden Prädiktor- oder LPC-Koeffizienten genannt. Sie werden durch Minimierungsverfahren berechnet.

Die besondere Bedeutung der LPC-Analyse für die Sprachanalyse und die Sprachsynthese hängt in erster Linie mit dem Sprachentstehungsmechanismus zusammen:

Die Spracherzeugung mit den humanen Sprechwerkzeugen kann hinreichend gut durch eine Anregungsquelle (Stimmlippen), ein akustisches Filter (Mund- und Nasenhöhle) und einen Schallstrahler (Mund) modelliert werden. Die Quelle liefert ein periodisches oder ein einem Rauschen ähnliches Signal, das im akustischen Filter des Vokaltraktes zum charakteristischen Laut verformt wird. Die momentanen Filtereigenschaften kennzeichnen somit den momentan gesprochenen Laut. Bei der LPC-Sprachanalyse entsprechen somit die momentanen Prädiktorkoeffizienten der jeweiligen Filterkonstellation bzw. somit auch dem jeweilig gesprochenen Laut. Bei der Sprachsynthese können die lautspezifischen Prädiktorkoeffizienten zur maschinellen Spracherzeugung verwendet werden.

An dem Beispiel der LPC-Sprachanalyse ist die Verwandschaft zur Frequenzanalyse von vornherein erkennbar. Wir werden sehen, daß aus den Prädiktorkoeffizienten auch eine Näherung für die Übertragungsfunktion ermittelt werden kann. Der Vorteil der LPC-Analyse gegenüber digitaler Fouriertransformation bzw. FFT ist wohl in erster Linie, daß mit einem minimalen Rechenaufwand eine problemorientierte minimale, aber hinreichende Analysegenauigkeit erreicht wird.

10.2. Methode

Der Abtastwert eines Signals x(n) werde approximiert durch eine Linearkombination von K vorangegangenen Abtastwerten:

$$x'(n) = \sum_{k=1}^{K} a_k \, x(n - k), \qquad (10.1)$$

a_k Prädiktorkoeffizienten,
K Anzahl der Koeffizienten oder Ordnung des Prädiktors.

Der Vorhersagefehler für die Approximation des Abtastwertes x(n) durch x'(n) ist dann

$$\epsilon(n) = x(n) - \sum_{k=1}^{K} a_k \, x(n - k). \qquad (10.2)$$

Die Prädiktorkoeffizienten a_k werden für den zu analysierenden Teilabschnitt des Signals als näherungsweise konstant betrachtet. Sie können dann im Gaußschen Minimierungsverfahren so bestimmt werden, daß die Summe über die Quadrate der Fehler minimiert wird:

$$F = \sum_{n} \epsilon^2(n) = \sum_{n} \Big[x(n) - \sum_{k=1}^{K} a_k \, x(n - k) \Big]^2 \longrightarrow \min.$$

Das Minimum wird dann in bekannter Weise durch Nullsetzen der partiellen Differentialkoeffizienten berechnet:

$$\frac{\partial F}{\partial a_k} = 0 \quad \text{für} \quad k = 1, \ldots, K .$$

Die Rechnung ergibt das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Prädiktorkoeffizienten:

$$\sum_{k=1}^{K} a_k \left\{ \sum_{m} x(n - k) \, x(n - i) \right\} = \sum_{n} x(n - i) \, x(n) \qquad (10.3)$$

mit i = 1, ..., K .

In der Sprachanalyse und in der Sprachsynthese werden meist 8 bis 16 Prädiktorkoeffizienten verwendet (K = 1 bis 16).

An Stelle des hier verwendeten Gaußschen Minimierungsverfahrens über die Fehlerquadrate werden auch andere Verfahren, z. B. Minimierung des Abstandsquadrates, verwendet.

Die Berechnung der Koeffizienten kann mit der Autokorrelationsmethode oder mit der Kovarianzmethode erfolgen. Auch weitere, z. B. rekursive Methoden, werden angewendet, siehe hierzu z. B. Sickert (1983), Markel und Gray (1976), Naumburger (1987).

10.2.1. Autokorrelationsmethode

Bei der Autokorrelationsmethode wird davon ausgegangen, daß durch Zeitfensterung das Signal außerhalb des Intervalls $0 \leqq n \leqq N - 1$ verschwindet. Das kann durch Fensterung mit rechteckförmigen oder auch anders geformten Zeitfenstern erreicht werden.

Dann folgt aus der Autokorrelationsfunktion für diskrete Funktionswerte

$$r_i = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n - i)\, x(n)$$

mit Gl. (10.3)

$$r_i = \sum_{n=1}^{N-1} x(n - i)\, x(n),$$

$$\boxed{r_i = \sum_{n=0}^{N-i-1} x(n)\, x(n + i).} \qquad (10.4)$$

Aus den Gleichungen (10.3) und (10.4) folgt dann

$$\boxed{\sum_{k=1}^{K} a_k\, r_{|i-k|} = r_i} \quad \text{mit } i = 1, \ldots, K . \qquad (10.5)$$

In Matrixform wird aus Gl. (10.5)

$$\begin{pmatrix} r_0 & r_1 & \cdots & r_{K-1} \\ r_1 & r_0 & \cdots & r_{K-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots & \vdots \\ r_{K-1} & r_{K-2} & \cdots & r_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_K \end{pmatrix} \quad . \qquad (10.6)$$

Für die rationelle Lösung der Matrixgleichung (10.6) bzw. die Auflösung des Gleichungssystems nach a_k gibt es eine Reihe von Verfahren, die generell angewendet werden oder die hierfür speziell geeignet sind (Markel und Gray (1976), Naumburger (1987)). Bei der Anwendung der LPC in der Praxis wird wohl meist der Autokorrelationsmethode bei der Bestimmung der Prädiktorkoeffizienten gegenüber anderen Methoden der Vorzug gegeben.

10.2.2. Kovarianzmethode

Bei der Autokorrelationsmethode stammen alle für die Korrelation verwendeten Abtastwerte aus einem Zeitabschnitt $T = N \Delta t$, der durch Zeitfensterung aus der Zeitfunktion $x(t)$ segmentiert wurde. Bei der Kovarianzmethode (die Bezeichnung ist, aus der englischsprachigen Literatur stammend, allgemein üblich, zur Unterscheidung von der Autokorrelationsmethode jedoch nicht besonders deutlich) werden bei der Korrelation außer den N Abtastwerten aus dem Zeitabschnitt $N \Delta t$ noch K Abtastwerte aus dem T vorangegangenen Zeitabschnitt $K \Delta t$ verwendet.

Mit der Korrelationsfunktion zwischen den bei -i und -k beginnenden Segmenten der Länge N

$$\boxed{c_{ik} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n - i)\, x(n - k)} \qquad (10.7)$$

folgt aus Gl. (10.3)

$$\boxed{\sum_{k=1}^{K} a_k\, c_{ik} = c_{i0}} \qquad \text{mit } i = 1, \ldots, K \qquad (10.8)$$

und in Matrixform

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1K} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2K} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots & \vdots \\ c_{K1} & c_{K2} & \cdots & c_{KK} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{10} \\ c_{20} \\ \vdots \\ c_{K0} \end{pmatrix} . \qquad (10.9)$$

Der Spaltenvektor $\{a_k\}$ in den Matrizengleichungen (10.6) und (10.9) entspricht den Prädiktorkoeffizienten. Man erhält ihn mit Hilfe der invertierten Matrizen. Zum Beispiel folgt aus Gl. (10.9)

$$\{a_k\} = (c_{ik})^{-1} \{c_{k0}\} .$$

10.3. Zusammenhang mit Frequenzanalyse

Wird die Ausgangsgleichung (10.1) etwas umgeschrieben:

$$x'(n) = \sum_{k=1}^{K} a(k)\, x(n-k),$$

$n - k = i$ gesetzt, $i \longrightarrow -\infty$ bis $+\infty$, dann wird

$$x'(n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(i)\, a(n-i). \qquad (10.10)$$

Gl. (10.10) ist eine diskrete Form des Faltungssatzes, und $a(k) = a_k$ kann somit als Gewichtsfunktion des Systems gedeutet werden, das mit konstanten Impulsen $x(n)$ erregt wird. Unter den Bedingungen der Prädiktorkoeffizienten durch Fehlerminimierung über einen Zeitabschnitt $T = N\,\Delta t$ bzw. $(N + K)\,\Delta t$ (Δt äquidistanter Abstand der Abtastwerte) nehmen die a_k-Werte die Bedeutung von Abtastwerten einer optimierten Gewichtsfunktion an.

Die Berechnung der Übertragungsfunktion $\underline{A}(f_i)$ aus der Gewichtsfunktion kann durch Fouriertransformation erfolgen:

$$\underline{A}(f_i) = \mathrm{DFT}\{a_k\} \quad \text{mit } k = 1, \ldots, K,$$

wobei K die Anzahl der Prädiktorkoeffizienten ist. Wird K zu $M = 2^p$ (p ganzzahlig) ergänzt, dann kann der FFT-Algorithmus angewendet werden:

$$\underline{A}(f_i) = \mathrm{FFT}\{a_m\}, \quad m = 0, \ldots, M-1.$$

Die Ergänzung der k-Werte erfolgt durch Auffüllung mit Nullen:

$$\begin{array}{lccccccccccc} a_k \longrightarrow & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & \ldots, & a_K, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ a_m \longrightarrow & a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & \ldots, & a_{K-1}, & a_K, & a_{K+1}, & \ldots, & a_{M-1} \end{array}$$

Die Wahl von M könnte prinzipiell so erfolgen, daß die zu K nächsthöhere Potenz von zwei gewählt wird. Damit wird aber der Linienabstand Δf von f_i ($f_i = (i+1)\Delta f$) sehr groß. Deshalb wird meist M erheblich größer gewählt, z. B. M = N, wenn N die Anzahl der Abtastwerte des Zeitsegmentes ist.

Der aus den Prädiktorkoeffizienten ermittelte Frequenzverlauf von $\underline{A}(f_i)$ hat gegenüber einem direkt aus dem Zeitvorgang berechneten Verlauf den Vorteil der Glättung. Ist z. B. das Quellsignal periodisch, dann ist diese Periodizität auch im Spektrum des Zeitsignals vorhanden. Dagegen ist in dem über die LPC-Analyse ermittelten Frequenzverlauf die Periodizität des Anregungssignals eliminiert. Bild 10.1 zeigt an einem Beispiel den Verlauf des Pegels des Spektrums $\left(20 \lg \frac{|\underline{A}(f)|}{A_0} \mathrm{dB}\right)$ eines stimmhaften Sprachsignals, auf direktem Wege gewonnen und geglättet über LPC-Analyse mit 28 Prädiktorkoeffizienten.

Andere Wege zur Ermittlung von Frequenzcharakteristiken des zu analysierenden Signals bzw. des das Quellsignal verformenden Traktes führen über Beschreibungen durch Analyse- und Synthesefilter.

10.4. Analyse- und Synthesefilter

Wir wollen wieder annehmen, ein Quellsignal e(t) gelange über ein Minimalphasensystem mit der Übertragungsfunktion $\underline{S}(z)$ an dessen Ausgang und erzeugt das Signal x(t). Gebrauchen wir die Z-Transformation, dann wird mit

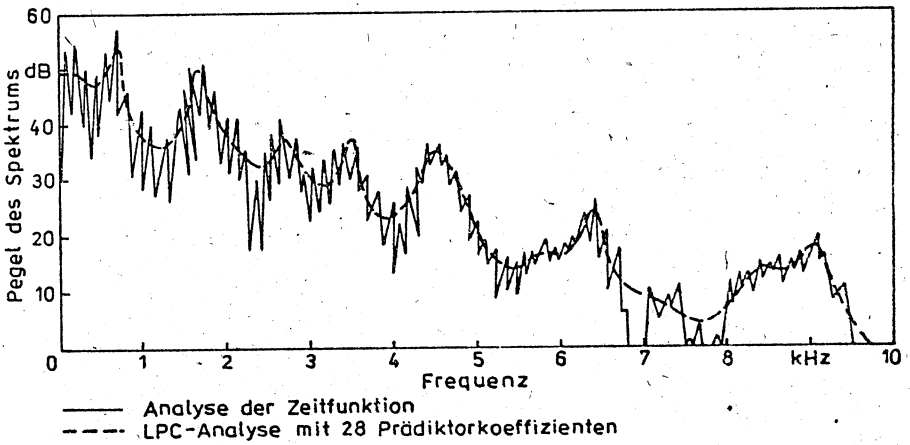


Bild 10.1 Spektrum von stimmhafter Sprache (nach Markel und Gray (1967))

$\underline{E}(z) = ZT\ e(t)$, $\underline{X}(z) = ZT\ x(t)$ und $\underline{A}(z) = \frac{1}{\underline{S}(z)}$,

$$\underline{X}(z) = \underline{S}(z)\ \underline{E}(z) = \frac{1}{\underline{A}(z)}\ \underline{E}(z) \quad \text{(Synthesemodell)}, \tag{10.11}$$

$$\underline{E}(z) = \underline{A}(z)\ \underline{X}(z) \quad \text{(Analysemodell)}. \tag{10.12}$$

In Gl. (10.11) ist $\underline{S}(z)$ ein Allpolfilter, das den Frequenzverlauf der Eingangsfunktion so verformt, daß sich die Eingangsfunktion e(t) ergibt.

Dagegen kann $\underline{A}(z)$ als ein inverses Filter (Allnullstellenfilter) angesehen werden, dessen Koeffizienten bei der Analyse so zu bestimmen sind, daß sich mit der Funktion x(t) am Eingang die eigentliche Eingangsfunktion e(t) am Ausgang ergibt.

Identifizieren wir e(t) mit dem Restfehler $\varepsilon(t)$, dann folgt aus Gl. (10.2) durch Z-Transformation:

$$\underline{E}(z) = \left[1 - \sum_{k=1}^{K} a_k\ z^{-k}\right] \underline{X}(z) = \underline{A}(z)\ \underline{X}(z)$$

mit

$$\underline{A}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{K} a_k\ z^{-k}\ .$$

Sind die Koeffizienten a_k durch LPC-Analyse nach den angegebenen Verfahren bestimmt, dann kann mit Gl. (10.11) die Synthese realisiert werden. Das findet zum Beispiel zur Sprachsynthese Anwendung oder auch zur Rücktransformation von Signalen, die zur Reduzierung des Informationsflusses durch LPC-Analyse in Prädiktorkoeffizienten kodiert wurden.

Mit $\underline{S}(z) = \frac{1}{\underline{A}(z)}$ können aber auch Interpretationen über den Frequenzverlauf des Spektrums des analysierten Signals bzw. der Übertragungsfunktion des zu analysierenden Systems erfolgen. Dazu gibt es mehrere Möglichkeiten.

Ein direkter Weg zur Berechnung des Frequenzganges ergibt sich aus der Beziehung

$$|\underline{S}(z)| = \frac{1}{|\underline{A}(z)|} = \frac{1}{\left|1 + \sum_{k=1}^{K} a_k \, z^{-k}\right|}$$

mit $z = e^{-j\omega k \Delta t} = \cos k\omega \Delta t - j \sin k\omega \Delta t; \quad \omega = \frac{2\pi}{T} k.$

$$|\underline{S}(\omega)|^2 = \frac{1}{\left[1 + \sum_{k=1}^{K} a_k \cos \frac{2\pi}{N} k\right]^2 + \left[\sum_{k=1}^{K} a_k \sin \frac{2\pi}{N} k\right]^2},$$

$T = N \Delta t$ Dauer des analysierten Segmentes,
N Anzahl der Abtastwerte,
Δt Abstand der Abtastwerte.

Ein anderer Weg führt über die Berechnung der Pole des Synthesefilters $\underline{S}(z)$ aus den Nullstellen z_k des Polynoms $\underline{A}(z)$:

$$\underline{A}(z) = \prod_{k=1}^{K} (1 - z_k \, z^{-1})$$

(siehe hierzu Markel und Gray (1976), Sickert (1983), Naumburger (1987)).

11. Zufällige Fehler bei der Messung regelloser Signale

Eine eingehende theoretische Behandlung der Problematik findet man bei Dávenport (1952) und Rice (1954).

Es sei x(t) die originale Zufallsfunktion, deren statistische Kenngrößen wir in der Regel nicht kennen, aber meßtechnisch erfassen wollen. Die mathematischen Operationen zur Bestimmung der statistischen Kenngrößen werden von den Meßgeräten oft nur unvollkommen nachgebildet, die Anzahl der entnommenen Meßwerte oder die Meßzeiten sind im Interesse eines geringen Meßaufwandes möglichst klein zu halten. Es ist dann wichtig, zu wissen, welche Fehler dadurch entstehen.

Es sei die Verarbeitungsfunktion

$$Z(t) = f(x(t))$$

eine lineare oder nichtlineare Funktion von x(t), die bei der Erfassung oder Verarbeitung der originalen Funktion gebildet wird.

Der Erwartungswert des zeitlichen Mittelwertes von Z(t) sei

$$E[Z(t)] = \bar{Z}.$$

Es sei weiter eine Probe (Meßwert)

$$M(T) = \frac{1}{T} \int_0^T Z(t)\, dt$$

der Mittelwert von Z(t) über eine endliche Meßzeit T.
Wird eine große Anzahl von Proben M(T) entnommen, dann ist der Erwartungswert

$$E[M(T)] = \bar{M} = \bar{Z} = E[Z(t)] \ .$$

11.1. Bestimmung der Streuung durch Mittelung über eine Zeit T

Wird ein Meßwert durch Mittelung über eine Zeit T erhalten, dann ist die mittlere quadratische Abweichung dieses Meßwertes vom Erwartungswert, das ist die Dispersion,

$$\sigma_M^2(T) = E\left[(M(T) - E[M(T)])^2\right] = E\left[M^2(T) - 2\,\bar{M}\,M(T) + \bar{M}^2\right]$$
$$= E\left[M^2(T)\right] - 2\,\bar{M}\,E[M(T)] + \bar{M}^2,$$
$$\sigma_M^2(T) = \overline{M^2(T)} - \bar{M}^2.$$

Nach Davenport (1952) wird

$$\sigma_M^2(T) = \frac{2}{T}\int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)\left[\psi_Z(\tau) - \bar{Z}^2\right] d\tau \quad , \qquad (11.1)$$

dabei ist $\psi_Z(\tau)$ die Autokorrelationsfunktion von Z(t).

Für die praktische Anwendung sind zwei Grenzwerte nützlich:

1. $\underline{T \longrightarrow 0}$

In Gl. (11.1) geht $\psi_Z(\tau) \longrightarrow \psi_Z(0)$,
und es wird

$$\sigma_M^2(T) \approx \left[\psi_Z(0) - \bar{Z}^2\right]\frac{2}{T}\int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) d\tau = \psi_Z(0) - \bar{Z}^2 = \tilde{Z}^2 - \bar{Z}^2,$$

$$\sigma_M^2(T) \approx \sigma_Z^2 .$$

Bei sehr kurzer Mittelungszeit T ist also die Standardabweichung $\sigma_M(T)$ etwa ebenso groß wie die Standardabweichung der Ausgangsfunktion Z(t) von ihrem Mittelwert $\bar{Z}$.

2. $\underline{T \longrightarrow \infty}$

Für $\tau \longrightarrow \infty$ geht $\psi_Z(\tau) \longrightarrow \bar{Z}^2$, und somit geht $\psi_Z(\tau) - \bar{Z}^2 \longrightarrow 0$.

Dann wird

$$\sigma_M^2(T) \approx \frac{2}{T}\int_0^T \left[\psi_Z(\tau) - \bar{Z}^2\right] d\tau \, . \qquad (11.2)$$

Nach dem Theorem von Wiener/Khintchine ist

$$w_Z(f) = 4\int_0^\infty \psi_Z(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau \, ,$$

$$w_{Z-\bar{Z}}(f) = 4 \int_0^\infty \psi_{Z-\bar{Z}}(\tau) \cos \omega \tau \, d\tau$$

$$= 4 \int_0^\infty \left[\psi_Z(\tau) - \bar{Z}^2 \right] \cos \omega \tau \, d\tau \, . \qquad (11.3)$$

Die rechte Seite von Gl. (11.2) stimmt mit der rechten Seite von Gl. (11.3) für f = 0, also $\omega = 0$, bis auf den Faktor vor dem Integral überein. Somit wird

$$\sigma_M^2(T) \approx \frac{w_{Z-\bar{Z}}(0)}{2\,T} \, .$$

Bei Vervierfachung der Meßzeit geht also die Standardabweichung auf den halben Wert zurück.

11.2. Mittelung aus N diskreten Werten bei periodischer Probenentnahme

Die bei einer Messung erforderliche Operation $\int_0^T Z(t)\,dt$ kann mit analogen Schaltkreisen über längere Zeiten T kaum ausgeführt werden. Es erfolgt deshalb häufig die Berechnung über die Entnahme von diskreten Werten. Wir nehmen an, es werden mit der Periode T_0 diskrete Werte $Z_n(n\,T_0)$ der Funktion Z(t) entnommen. Dann ergibt sich für die Probe als Mittelwert

$$M(N, T_0) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} Z_n(n\,T_0) \, .$$

Es wird dann

$$\sigma_M^2(N, T_0) = E\left[M^2(N, T_0)\right] - \left\{E\left[M(N, T_0)\right]\right\}^2 \, .$$

Die Rechnung ergibt

$$\sigma_M^2(N, T_0) = \frac{\psi_Z(0) - \bar{Z}^2}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{K=1}^{N} (N - K) \left\{ \psi_Z(K\,T_0) - \bar{Z}^2 \right\} . \qquad (11.4)$$

Für $N \longrightarrow \infty$ und $T_0 \longrightarrow 0$ geht Gl. (11.4) in Gl. (11.1) über. Gl. (11.4) liefert für endliches N immer eine größere Dispersion als Gl. (11.1), denn die vollständige Funktion Z(t) enthält im gleichen Zeitintervall $T = N T_0$ mehr Information als die Zahl N von Abtastwerten.

Wählt man die Abtastperiode größer als den Kehrwert der höchsten Frequenzen von Z(t), dann geht $\psi_Z(K T_0) - \bar{Z}^2 \longrightarrow 0$, und Gl. (11.4) geht in die bekannte Beziehung über:

$$\sigma_M = \frac{\sigma_Z}{\sqrt{N}} .$$

Achtung! Enthält Z(t) periodische Anteile mit einer Periode T_0, dann verschwindet $\psi_Z(K T_0) - \bar{Z}^2$ nicht mit wachsendem K, und σ_M kann dann konstant (unabhängig von N) bleiben.

11.3. Mittelung durch Integration mit Tiefpaßfiltern

In sehr vielen Meßgeräten erfolgt Mittelung durch Integration mit Tiefpaßfiltern, wobei die Tiefpaßfilter oft RC-Glieder sind oder auch durch die träge Masse und die Dämpfung von mechanischen Anzeigeinstrumenten gebildet werden.

Die Funktion Z(t) werde auf ein Tiefpaßfilter mit der Impulsantwort h(t) gegeben. Somit wird

$$M(T) = \int_0^T h(u)\, Z(T - u)\, du, \qquad (11.5)$$

wenn T die Beobachtungszeit ist. Da nur über den Beobachtungszeitraum T beobachtet wird, ist es zweckmäßig, eine neue Filterfunktion h(t, T) einzuführen, die sowohl die Eigenschaft des Tiefpaßfilters als auch die endliche Beobachtungszeit beinhaltet:

$$h(t, T) = \begin{cases} h(t) & \text{für } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{für } t > T \text{ und } t < 0. \end{cases}$$

Wir erhalten als Fouriertransformierte von h(t, T) die Systemfunktion des zeitbegrenzten Filters

$$G(\omega, T) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, T)\, e^{-j\omega t}\, dt\ .$$

An Stelle von Gl. (11.5) wird

$$M(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u, T)\, Z(T - u)\, du.$$

Der Erwartungswert von M ist jetzt nicht mehr identisch mit dem Erwartungswert von Z. Vielmehr wird

$$\bar{M} = E[M(T)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u, T)\, E[Z(T - u)]\, du = \bar{Z} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u, T)\, du.$$

Nach Davenport (1952) ist

$$\frac{\sigma_M}{\bar{M}} = \frac{\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_h(\tau) \left[\psi_Z(\tau) - \bar{Z}^2 \right] d\tau \right\}^{\frac{1}{2}}}{\bar{Z} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau, T)\, d\tau}\ , \qquad (11.6)$$

$\psi_Z(\tau)$ ist die Autokorrelationsfunktion von Z(t).

$$\psi_h(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u, T)\, h(u + \tau, T)\, du$$

kann als die Autokorrelationsfunktion einer Filterausgangsfunktion interpretiert werden, wenn am Filtereingang ein weißes Rauschen mit der Leistungsdichte 2 anliegt.

An Stelle von Gl. (11.6) gilt auch

$$\frac{\sigma_M}{\bar{M}} = \frac{\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\omega, T)|^2 \, w_{Z-\bar{Z}}(f) \, df \right\}^{\frac{1}{2}}}{\bar{Z} \, G(0, T)} , \qquad (11.7)$$

$G(\omega, T)$ Systemfunktion des Filters,

$w_{Z-\bar{Z}}$ Leistungsdichte der Funktion $Z(t) - \bar{Z}$.

Grenzfälle:

1. $\underline{T \longrightarrow 0}$

Wegen des schmalen Zeitfensters ist die effektive Filterbreite groß gegenüber der Spektraldichte $w_{Z-\bar{Z}}$. Es wird dann

$$|G(\omega, T)|^2 \approx G^2(0, T)$$

und somit

$$\frac{\sigma_M}{\bar{M}} \approx \frac{\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} w_{Z-\bar{Z}}(f) \, df \right\}^{\frac{1}{2}}}{\bar{Z}} = \frac{\left\{ \psi_Z(0) - \bar{Z}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}{\bar{Z}} = \frac{\sigma_Z}{\bar{Z}} .$$

2. $\underline{T \longrightarrow \infty}$

Wenn der Tiefpaßintegrator überhaupt als Integrator wirksam sein soll, dann ist seine Bandbreite sehr viel schmaler als die Bandbreite von $w_{Z-\bar{Z}}$. Es wird $h(t, T) \approx h(t)$, $G(\omega, T) \approx G(\omega)$, $w_{Z-\bar{Z}}(f) \approx w_{Z-\bar{Z}}(0)$. Dann wird

$$\frac{\sigma_M}{\bar{M}} \approx \frac{\left[w_{Z-\bar{Z}}(0) \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\omega)|^2 \, df \right]^{\frac{1}{2}}}{\bar{Z} \, G(0)} ,$$

und mit der effektiven Filterbreite

$$B = \frac{\int_0^{+\infty} |G(\omega)|^2 \, df}{G^2(0)}$$

wird

$$\frac{\sigma_M}{\bar{M}} \approx \frac{\left[w_{Z-\bar{Z}}(0)\ B\right]^{\frac{1}{2}}}{\bar{Z}} \,. \qquad (11.8)$$

Es ist zu beachten: Gl. (11.8) gibt die relative Streuung an, die entsteht, wenn eine Probenentnahme - also eine Ablesung des Meßwertes - nach einer Zeit T nach Anlegen der Zeitfunktion Z(t) an den Eingang des Integrators erfolgt. In der Praxis nimmt die ablesende Person häufig eine Mittelwertbildung über die Zeit T vor, in diesem Fall wird die Streuung kleiner.

11.4. Anwendung auf Effektivwertmessung

Es liege eine normalverteilte Funktion x(t) vor, deren Effektivwert zu bestimmen ist. x(t) sei durch ein RC-Filter zu hohen Frequenzen hin bandbegrenzt. Die Messung des Effektivwertes erfolgt mit einer Anordnung, deren prinzipieller Aufbau im Blockschaltbild Bild 11.1 dargestellt ist.

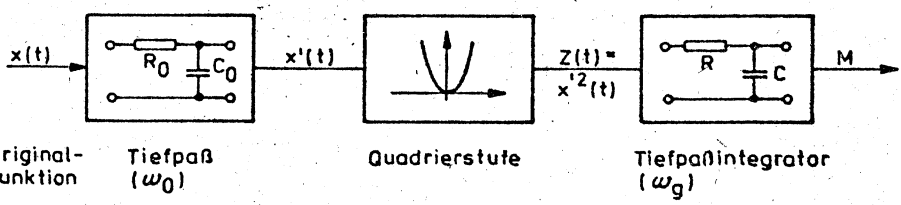


Bild 11.1 Blockschaltbild einer Anordnung zur Messung des Effektivwertes

Der Bandpaß zur Begrenzung von x(t) hat eine Grenzfrequenz

$$\omega_0 = \frac{1}{R_0\, C_0} \,.$$

Die Verarbeitungsfunktion ist $Z(t) = x'^2(t)$.

Der Tiefpaßintegrator hat eine Grenzfrequenz $\omega_g = \frac{1}{R\,C}$.

Es ist $\frac{\sigma_M}{\bar{M}}$ nach Gl. (11.7) zu bestimmen.

Die Rechnung ergibt:

$$\frac{\sigma_M}{\bar{M}} = \left\{ \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{\omega_0}{\omega_g}} + \frac{e^{-2\omega_g T}}{\frac{1}{2} - \frac{\omega_0}{\omega_g}} - \frac{e^{-(\omega_g + 2\omega_0)T}}{\frac{1}{2} - \left(\frac{\omega_0}{\omega_g}\right)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\omega_g T}} \,. \qquad (11.9)$$

Grenzwerte:

1. $\omega_g \longrightarrow 0$ (idealer Integrator)

Es wird

$$\frac{\sigma_M}{\bar{M}} = \frac{1}{\omega_0 T} \left[2\,\omega_0\, T - 1 + e^{-2\omega_0 T} \right]^{\frac{1}{2}} .$$

2. $T \longrightarrow \infty$

Es wird

$$\frac{\sigma_M}{\bar{M}} = \left[\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{\omega_0}{\omega_g}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

und für $\omega_g << \omega_0$: $\quad \frac{\sigma_M}{\bar{M}} = \sqrt{\frac{\omega_g}{\omega_0}}$.

In Auswertung des Bildes 11.2 und zu seiner Ergänzung bzw. zur Ergänzung der Gl. (11.9) ist zu beachten:

- Bei konstantem $\frac{\omega_0}{\omega_g}$ werden, abhängig von der Beobachtungszeit T, asymptotische Grenzwerte für $\frac{\sigma_M}{\bar{M}}$ erreicht.
- Mit einem idealen Integrator ($\frac{\omega_0}{\omega_g} \longrightarrow \infty$) sind, solange der asymptotische Grenzwert nicht erreicht ist, kaum geringere Standardabweichungen zu erreichen als mit einem RC-Integrator.
- Bild 11.2 und Gl. (11.9) gelten dann, wenn der Meßwert nach einer Zeit T nach Anlegen der Meßgröße x(t) abgelesen wird. Bei Ablesung eines Meßwertes durch eine Beobachtungsperson wird meist über eine gewisse Zeit gemittelt. Wenn die optische

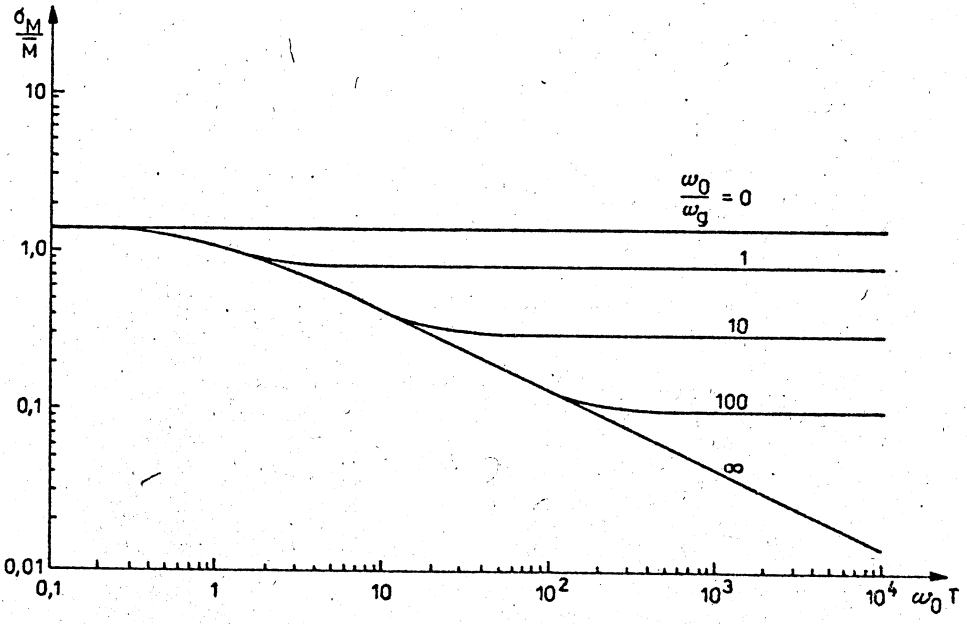


Bild 11.2 Relative Standardabweichung $\frac{\sigma_M}{M}$ bei der Effektivwertmessung nach Gl. (11:9)

Mittelung der Schwankungen über einen Zeitabschnitt T durchgeführt wird, dann kann näherungsweise angenommen werden, daß ein idealer Integrator vorliegt, und es kann somit $\frac{\omega_0}{\omega_g} = \infty$ für die Abschätzung von $\frac{\sigma_M}{M}$ herangezogen werden.

12. Aufgaben

Aufgabe 1

Leiten Sie aus den Beziehungen für die Analyse periodischer Zeitfunktionen

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{X}_n \, e^{jn\omega_0 t} \,,$$

$$\underline{X}_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

vereinfachte Beziehungen für die Analyse

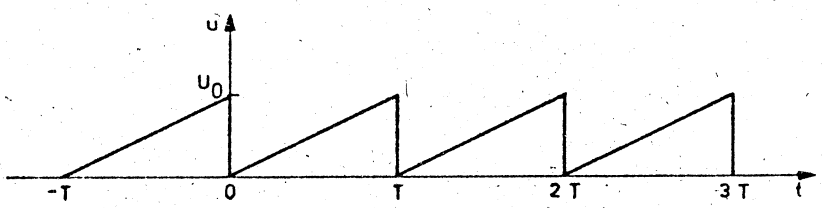
a) symmetrischer Zeitfunktionen ($x(t) = x(-t)$);

b) schiefsymmetrischer Zeitfunktionen ($x(t) = -x(-t)$)

her!

Aufgabe 2

Ein sägezahnförmiger Spannungsverlauf u(t) wird periodisch mit der Periode T wiederholt.



a) Berechnen Sie das Linienspektrum, und stellen Sie den Zeitvorgang als Reihe dar!

b) Stellen Sie das Amplituden- und das Phasenspektrum im Diagramm dar!

c) Berechnen Sie den Effektivwert der Spannung!

d) Die Spannung wird auf einen idealen Hochpaß mit der Grenzfrequenz

$$f_H = \frac{1}{2} f_0$$

(f_0 Grundfrequenz des periodischen Vorganges)

gegeben. Zeichnen Sie den Spannungsverlauf am Ausgang des Hochpasses! Berechnen Sie den Effektivwert!

e) Die Spannung wird auf einen idealen Tiefpaß mit der Grenzfrequenz

α) $f_T = 5{,}5\, f_0$,

β) $f_T = 10{,}5\, f_0$

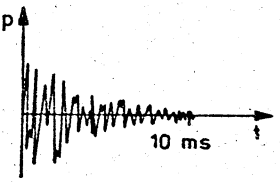
gegeben. Wir können die am Ausgang des Tiefpasses auftretende Spannung so auffassen, als ob die Originalspannung von einer überlagerten Störspannung verzerrt wird.

Wie groß sind die Effektivwerte der Ausgangsspannungen am Tiefpaß und die Effektivwerte der Störspannungen?

Aufgabe 3

An einer Arbeitsmaschine wird ein Einzelimpuls mit einem Mikrofon aufgenommen und mit einem Digitalspeicher registriert. Der Impuls möge etwa folgenden Zeitverlauf besitzen:

Zur spektralen Analyse wird der Impuls mit einer Wiederholfrequenz von 10 Hz vom Digitalspeicher abgefragt und einem Terzpegelanalysator zugeführt.



Dabei werden folgende Terzpegel registriert:

f_m/kHz	0,2	0,25	0,32	0,4	0,5	0,63	0,8	1	1,25
$L/\frac{dB}{Terz}$	46	58	64	70	82	88	94	88	88

f_m/kHz	1,6	2	2,5	3,15	4	5	6,3	8	10
$L/\frac{dB}{Terz}$	94	100	80	74	68	74	62	56	50

a) Der gegebene Terzpegelverlauf ist auf Oktavpegelverlauf umzurechnen!

b) Die Pegelwerte sind auf eine Wiederholfrequenz von 1 Hz umzurechnen!

c) Berechnen Sie die Energie eines Einzelimpulses!

$$\left(E = \int p^2(t)\, dt\right)$$

d) Berechnen Sie den Gesamtpegel des mit 10 Hz wiederholten Impulses!

e) Wie könnte man die Anlage kalibrieren?

(Definitionen: siehe Aufgabe 4)

Aufgabe 4

Ein (weißes) Geräusch hat eine konstante Leistungsdichte $w(f) = \text{konst.} = 5 \cdot 10^{-3}\ \text{Pa}^2 \cdot \text{s}$.

Es wird mit einem Schallpegelmesser analysiert. Der Schallpegelmesser enthält wahlweise ein umschaltbares Terzfilter oder ein umschaltbares Oktavfilter.

a) Berechnen Sie den Terzschallpegelverlauf und den Oktavschallpegelverlauf der Meßgeräteanzeige für den Terzfilterbereich f_m = 100 bis 1000 Hz und den Oktavfilterbereich f_m = 125 bis 1000 Hz, und stellen Sie ihn graphisch dar!

b) Um wieviel dB verändert sich die Anzeige des Schallpegelmessers, wenn bei unverändert eingestellter Mittenfrequenz von Terz- auf Oktavfilter umgeschaltet wird?

c) Welchen Leistungsdichteverlauf muß ein "rosa" Rauschen besitzen? Bei einem "rosa" Rauschen ist der Effektivwert bzw. der Pegel für Filter mit konstanter relativer Bandbreite unabhängig von der Mittenfrequenz der Filter.

Schallpegel: $L = 20 \lg \frac{\tilde{p}}{p_0}\ \text{dB}$,

Bezugschalldruck: $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}\ \text{Pa}$,

$1\ \text{Pa (1 Pascal)} = 1\ \text{N/m}^2$,

Terzfilter: $f_o = \sqrt[3]{2}\, f_u$,

Oktavfilter: $f_o = 2\, f_u$,

Mittenfrequenz: $f_m = \sqrt{f_o\, f_u}$,

f_o obere Grenzfrequenz,

f_u untere Grenzfrequenz.

Mittenfrequenzreihe von 100 Hz bis 1250 Hz (f_m in Hz)

Terzfilter: 100, 125, 160, 200, 250, 315, 400, 500, 630, 800, 1000, 1250;

Oktavfilter: 125, 250, 500, 1000.

Aufgabe 5

Ein Rechteckfilter habe im technischen Frequenzbereich den Übertragungsfaktor

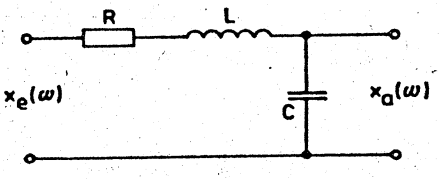
$$\underline{A}(\omega) = \frac{\underline{x}_a(\omega)}{\underline{x}_e(\omega)} = 1 \text{ für } \omega_u < \omega < \omega_o ,$$

$$\underline{A}(\omega) = 0 \text{ sonst.}$$

Berechnen Sie das Zeitfenster!

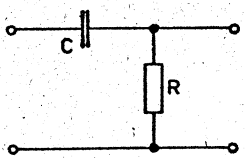
Aufgabe 6

Berechnen Sie das Zeitfenster eines Reihenschwingkreises mit Hilfe der Fouriertransformation unter Verwendung des Residuensatzes (siehe Anhang 3):



Aufgabe 7

Berechnen Sie das Zeitfenster eines RC-Hochpasses!



Aufgabe 8

Berechnen Sie für den sägezahnförmigen Zeitvorgang der Aufgabe 2 das Mäanderspektrum!

Vergleichen Sie den Restfehler für gleiche Anzahl von Entwicklungskoeffizienten für harmonische Analyse und für die Analyse mit Mäanderfunktionen!

Aufgabe 9

Berechnen Sie für die periodische Funktion $\sin \omega t$ das Fourierspektrum und das Mäanderspektrum bis $x_s(3, \theta)$!

Berechnen Sie den relativen Approximationsfehler!

Aufgabe 10

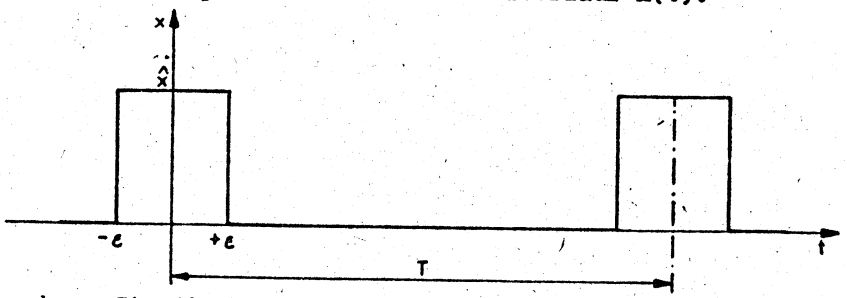
Berechnen Sie für den Zeitvorgang der Aufgabe 2 das Mäanderspektrum!

Vergleichen Sie den Restfehler für gleiche Anzahl von Entwicklungskoeffizienten für die harmonische Analyse und für die Analyse mit Mäanderfunktionen!

Zur Vereinfachung der Analyse können Sie die Zeitfunktion durch Abzug eines Gleichgliedes in eine schiefsymmetrische Zeitfunktion transformieren.

Aufgabe 11

Gegeben sei ein periodischer Funktionsverlauf x(t).



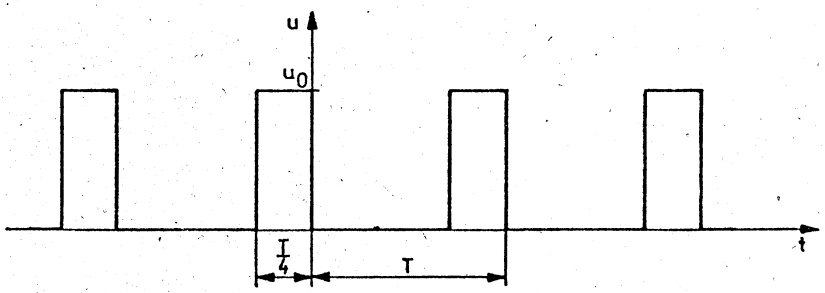
Berechnen Sie die Hilberttransformierte $x_H(t)$ und den Verlauf des Betrages der analytischen Funktion $|\underline{x}(t)| = |x(t) + j\, x_H(t)|$ im Zeit- und im Frequenzbereich!

Skizzieren Sie den Verlauf von $x_H(t)$ und von $|x(t)|$ für $\frac{T}{\tau} = 10$ unter Benutzung eines programmierbaren Rechners. Steht Ihnen kein programmierbarer Rechner zur Verfügung, dann skizzieren Sie den Verlauf schematisch. Gehen Sie hierbei von dem im Zeitbereich ermittelten Verlauf $x_H(t)$ und $|\underline{x}(t)|$ eines einzelnen symmetrischen Rechteckimpulses aus.

Diskutieren Sie mit den Ergebnissen dieser Aufgabe die allgemeine Brauchbarkeit der Methode der Hüllkurvenbildung über die analytische Funktion!

Aufgabe 12

Gegeben sei ein periodischer Spannungsverlauf



a) Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion, und stellen Sie sie als Funktion der Verschiebungsvariablen τ graphisch dar!

b) Wie a), jedoch die Zeitfunktion wird um $\frac{T}{4}$ in positiver t-Richtung zeitverschoben.

c) Geben Sie die Autokorrelationsfunktion als Fourierreihe an! Gehen Sie zweckmäßig von der Fourierreihe der Zeitfunktion aus!

d) Berechnen Sie die Leistungsdichte!

e) Die Spannung wird auf einen Gleichspannungsmesser gegeben. Was zeigt das Gerät an?

f) Die Spannung wird auf einen Effektivwertmesser gegeben. Was zeigt das Gerät an?

g) Die Spannung wird auf einen idealen Tiefpaß gegeben, dessen Grenzfrequenz das 6fache der Grundfrequenz der Zeitfunktion

beträgt. Was zeigen Gleichspannungsmesser und Effektivwertmesser am Ausgang des Tiefpasses an?

h) Die Spannung wird auf einen idealen Hochpaß gegeben, dessen Grenzfrequenz das 0,5fache der Grundfrequenz der Zeitfunktion beträgt. Was zeigen Effektivwertmesser und Gleichspannungsmesser am Ausgang des Hochpasses an?

Aufgabe 13

Eine sinusförmige Zeitfunktion der Frequenz f_e wird mit einer Abtastfrequenz f_A abgetastet. Kurze Impulse, die den Werten der Folge der Abtastwerte proportional sind, werden auf einen Tiefpaß mit der Grenzfrequenz $\frac{f_A}{2}$ gegeben. Welche Frequenz hat die sinusförmige Ausgangsfunktion, wenn f_e $\frac{f_A}{3}$, $\frac{2}{3} f_A$, f_A, $\frac{5}{4} f_A$ beträgt?

Aufgabe 14

a) Ein stationärer Vorgang am Eingang eines linearen Vierpols habe die Leistungsdichte $\underline{S}_e(\omega)$.

Der Vierpol habe den Frequenzgang $\underline{G}(j\omega)$.

Berechnen Sie die Leistungsdichte am Ausgang des Vierpols!

b) Am Eingang eines Tiefpasses, der aus einem RC-Glied ($\omega_0 = \frac{1}{RC}$) besteht, liegt ein weißes Rauschen.

α) Geben Sie den Verlauf der Leistungsdichten w(f) und S(ω) am Ausgang an!

β) Zeigen Sie, daß die Autokorrelationsfunktion des Rauschens am Ausgang

$\psi(\tau) = \psi(0)\, e^{-\omega_0 |\tau|}$ ist!

c) Ein Vorgang besitzt eine Leistungsdichte

$S(\omega) = S_0\, e^{-\left|\frac{\omega}{\omega_0}\right|}$. Wie verläuft die Autokorrelationsfunktion?

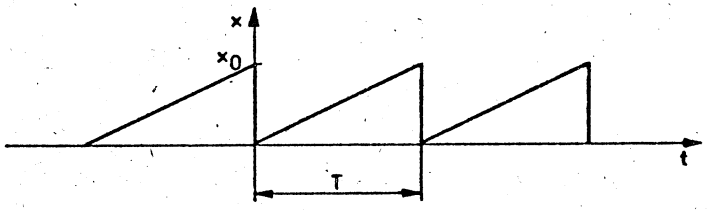
Vergleichen Sie und interpretieren Sie die Ergebnisse der Aufgaben b) und c)!

d) Welche Autokorrelationsfunktion weist den prinzipiell gleichen Verlauf wie die zugehörige Kurve des Leistungsspektrums auf?

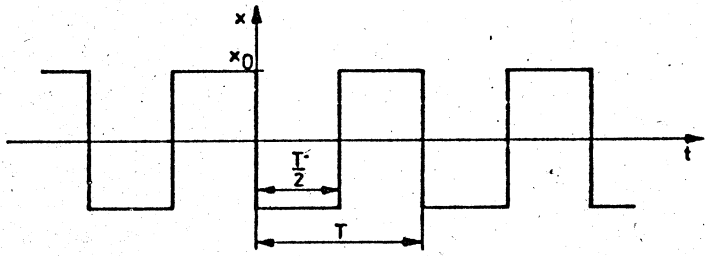
Aufgabe 15

Berechnen Sie die Verteilungsdichtefunktion und die Verteilungsfunktion, und skizzieren Sie den Verlauf! Zeigen Sie, daß $P(\infty)$ für die angegebenen Funktionen gleich 1 ist!

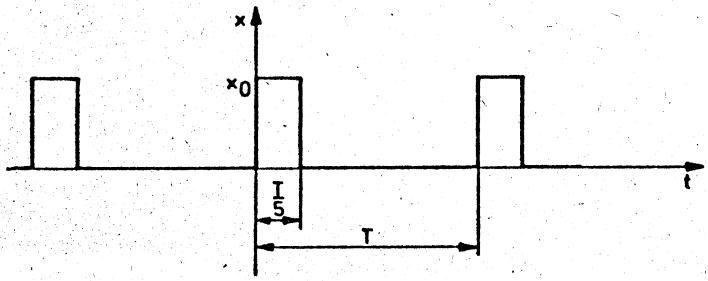
a)



b)



c)



d) $x = x_0 \sin \omega t$,

e) $x = x_0 \cos \omega t$.

Aufgabe 16

Ein Vorgang besitzt einen Verlauf der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p(x) = K\, e^{-\frac{|x|}{\lambda}}.$$

a) Bestimmen Sie K!

b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion!

c) Tragen Sie Dichte- und Verteilungsfunktion in einem Diagramm auf!

d) Bestimmen Sie den linearen Mittelwert E[x] !

e) Berechnen Sie den quadratischen Mittelwert $E[x^2]$!

f) Berechnen Sie die Streuung σ_x !

g) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist $P(|x| > \lambda)$?

Anhang

1. Beschreibung eines Zweitorsystems durch die Übertragungsfunktion

Ein Zweitorsystem (z. B. ein elektrischer Vierpol), an dessen Eingang die Eingangsgröße x(t) und an dessen Ausgang die Ausgangsgröße y(t) liegt, kann durch die Übertragungsfunktion beschrieben werden:

$$\underline{A}(\omega) = |\underline{A}(\omega)|\, e^{j\varphi} = \frac{\underline{Y}(\omega)}{\underline{X}(\omega)}. \qquad (A.1)$$

$\underline{Y}(\omega)$ kennzeichnet die sinusförmige Ausgangsfunktion, die von einer an den Eingang gelegten sinusförmigen Eingangsfunktion, gekennzeichnet durch $\underline{X}(\omega)$, hervorgerufen wird. Es ist

$$x(t) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x) = \mathrm{Re}\left\{\underline{X}(\omega)\, e^{j\omega t}\right\} \quad \text{mit } \underline{X}(\omega) = \hat{x}\, e^{j\varphi_x},$$

$$y(t) = \hat{y} \cos(\omega t + \varphi_y) = \mathrm{Re}\left\{\underline{Y}(\omega)\, e^{j\omega t}\right\} \quad \text{mit } \underline{Y}(\omega) = \hat{y}\, e^{j\varphi_y},$$

wobei $\hat{x}$, $\hat{y}$, φ_x, φ_y von ω abhängig sein können.

$\underline{A}(\omega)$ kann leicht gemessen werden. Handelt es sich z. B. um einen elektrischen Vierpol, dann wird an den Eingang eine sinusförmige Spannung x(t) gelegt, und am Ausgang wird die Spannung y(t) gemessen.

$|\underline{A}(\omega)|$ ist dann das Verhältnis der Effektivwerte oder der Spitzenwerte von Ausgangs- zu Eingangsspannung bei der jeweiligen Frequenz. Es ist in diesem Fall eine dimensionslose Größe. φ ist die Phasenverschiebung der Ausgangsgröße, bezogen auf die Eingangsgröße. Meist interessiert man sich nur für den Betrag der Übertragungsfunktion $|\underline{A}(\omega)|$.

Zur Bestimmung der Übertragungsfunktion eines mechanischen Systems wird man z. B. auf den Eingang eine sinusförmige Kraft einwirken lassen und am Ausgang eine Schwinggeschwindigkeit (Schnelle) messen. Welche Dimension hat dann $\underline{A}(\omega)$?

In der Praxis wird entweder bei dicht nebeneinander liegenden diskreten Frequenzen gemessen, oder die Frequenz der Eingangsgröße wird stetig langsam verändert (gleitender Sinus).

Liegt am Eingang des Zweitorsystems eine beliebige Eingangszeitfunktion x(t) an, dann kann der zeitliche Verlauf der Ausgangszeitfunktion über die Fouriertransformierten der Eingangszeitfunktion $\underline{X}(\omega)$ und der Ausgangszeitfunktion $\underline{Y}(\omega)$ leicht bestimmt werden.

Aus Gl. (3.17), Abschnitt 3.2., folgt sinngemäß

$$y(t) = FT^{-1}\ \underline{Y}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{Y}(\omega)\ e^{j\omega t}\ d\omega .$$

Nach Gl. (A.1) ist die Fouriertransformierte der Ausgangszeitfunktion das Produkt von Fouriertransformierter der Eingangszeitfunktion und dem Übertragungsfaktor: $\underline{Y}(\omega) = \underline{A}(\omega)\ \underline{X}(\omega)$.

Somit wird

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{X}(\omega)\ \underline{A}(\omega)\ e^{j\omega t}\ d\omega , \qquad (A.2)$$

wobei nach Gl. (3.16), Abschnitt 3.2., gilt

$$\underline{X}(\omega) = FT\ x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ e^{-j\omega t}\ dt.$$

Gl. (A.2) enthält die wichtige Aussage, daß in linearen Zweitorsystemen die Eingangszeitfunktion in ihre sinusförmigen Bestandteile zerlegt werden kann, daß diese Bestandteile mit dem jeweiligen Wert der Übertragungsfunktion bewertet, voneinander unabhängig überlagert, zur Ausgangszeitfunktion zusammengefügt werden können.

2. Beschreibung eines Zweitorsystems durch die Gewichtsfunktion

Gibt man auf den Eingang eines Zweitorsystems einen kurzen Impuls $x(t)$, z. B. auf den Eingang eines elektrischen Vierpols einen Spannungsimpuls, dann erhält man am Ausgang eine Impulsantwort $g(t)$. Man kann diesen Impuls idealisieren durch einen Einheitsstoß, auch Dirac-Stoß $\delta(t)$ genannt, indem man annimmt, der Impuls habe einen unendlich großen Wert zur Zeit $t = 0$, zu allen anderen Zeiten sei sein Wert Null, und das Zeitintegral sei gleich eins:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq 0 , \\ \infty & \text{für } t = 0 , \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1 . \qquad \text{(A.3)}$$

Die Antwort eines Zweitorsystems auf einen Dirac-Stoß wird als Gewichtsfunktion oder Einheitsstoßantwort $g_E(t)$ bezeichnet. Der Einheitsstoß hat eine Amplitudendichte

$$\underline{X}_E(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = 1 ,$$

denn $e^{-j\omega t} = 1$ für $t = 0$, und für $t \neq 0$ ist $\delta(t) = 0$.

Die Amplitudendichte der Gewichtsfunktion $\underline{G}_E(\omega)$ folgt dann aus Gl. (A.1),

$$\underline{G}_E(\omega) = 1 \cdot \underline{A}(\omega) = \underline{A}(\omega) ,$$

ist also gleich der Übertragungsfunktion. Es gilt somit

$$\underline{A}(\omega) = \mathrm{FT}\, g_E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_E(t)\, e^{-j\omega t}\, dt, \qquad (A.4)$$

$$g_E(t) = \mathrm{FT}^{-1}\, \underline{A}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{A}(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega\,. \qquad (A.5)$$

Übertragungsfunktion $\underline{A}(\omega)$ und Gewichtsfunktion $g_E(t)$ sind somit durch die Fouriertransformation miteinander verbunden.

Es läßt sich leicht zeigen, daß man die Ausgangsfunktion eines Zweitorsystems als Antwort auf eine beliebige Eingangsfunktion aus der Beziehung erhält:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, g_E(t - \tau)\, d\tau\,. \qquad (A.6)$$

Gl. (A.6) wird als Faltungsintegral bezeichnet. Symbolisch wird die Faltungsoperation in Gl. (A.6) in folgender Weise gekennzeichnet:

$$y(t) = x(t) * g_E(t)\,.$$

Wir wollen uns die Faltungsoperation an Hand des Bildes A.1 veranschaulichen.

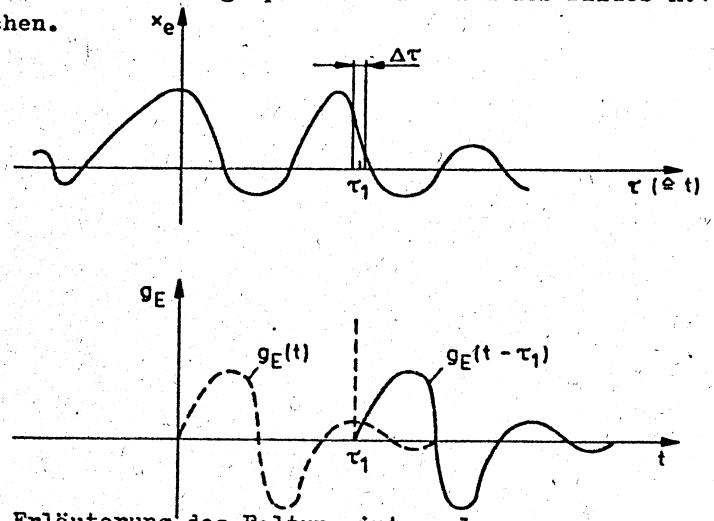


Bild A.1 Erläuterung des Faltungsintegrals

Am Zweitoreingang liege die im oberen Teil des Bildes A.1 dargestellte Zeitfunktion x(t) an. Der Einheitsstoß zur Zeit t = 0 erzeugt die im unteren Teil des Bildes gestrichelt dargestellte Gewichtsfunktion $g_E(t)$. Blenden wir aus der Zeitfunktion $x(t) \triangleq x(\tau)$ zur Zeit τ_1 einen kurzen Abschnitt $x(\tau_1)$ heraus, dann wird dieser Impuls am Zweitorausgang die Impulsantwort

$$g(t) = x(\tau_1)\, \Delta\tau\, g_E(t - \tau_1)$$

erzeugen. Wird nun die Zeitfunktion x(t) lückenlos in kurze Abschnitte zerlegt und auf den Zweitoreingang gegeben, dann sind alle Antworten zu summieren oder beim Grenzübergang $\Delta\tau \longrightarrow d\tau$ zu integrieren.

Es entsteht anschaulich das Faltungsintegral Gl. (A.6).

In der technischen Anwendung interessiert man sich häufig für das Verhalten von Systemen, auf die zur Zeit t = 0 eine Eingangsfunktion x(t) gegeben wird. Im Integral in Gl. (A.6) kann dann die untere Grenze Null gesetzt werden, denn es ist $x(\tau) = 0$ für $\tau < 0$.

Alle realen (kausalen) Systeme können nur eine Wirkung nach erfolgter Ursache zeigen, d. h., die Einheitsstoßantwort verschwindet für $t < 0$. Dann wird aber auch $g_E(t - \tau) = 0$ für $\tau > t$. Es kann deshalb für die obere Grenze im Integral t gesetzt werden. Es wird dann

$$y(t) = x(t) * g_E(t) = \int_0^t x(\tau)\, g_E(t - \tau)\, d\tau \,. \qquad (A.7)$$

In dieser Form wird das Faltungsintegral meistens in der technischen Literatur angegeben.

Die Gewichtsfunktion kann analytisch, bei bekanntem Frequenzgang, aus der Übertragungsfunktion durch Fourierrücktransformation nach Gl. (A.5) ermittelt werden. Sie kann meßtechnisch auch so bestimmt werden, daß auf den Eingang eine kurze Testfunktion $x_T(t)$ gegeben wird. Am Ausgang wird dann die Antwortfunktion $y_T(t)$ gemessen. Es ist dann, das folgt aus den Gleichungen (A.1) und (A.5),

$$g_E(t) = FT^{-1}\left\{\frac{FT\ y_T(t)}{FT\ x_T(t)}\right\}. \qquad (A.8)$$

Ist der Impuls genügend kurz, so daß wir ihn durch den Einheitsstoß approximieren können (wir wollen ihn mit $x_\perp(t)$ bezeichnen), dann ist:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_\perp(t)\,dt = K \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = K.$$

Es folgt dann aus Gl. (A.8)

$$g_E(t) = \frac{1}{K}\, y_\perp(t), \qquad \text{(A.9)}$$

wenn $y_\perp(t)$ die Impulsantwort auf $x_\perp(t)$ ist.

Frage: Wie muß ein solcher Stoß beschaffen sein; wie kurz muß er sein?

Die Frage kann nur unter Beachtung der geforderten Meßgenauigkeit beantwortet werden. Es wird angenommen, daß auf den Eingang des Vierpols ein kosinusförmiger Spannungsstoß der Breite τ nach Bild A.2 gegeben wird. Die Rechnung ergibt für die Fouriertransformierte, also das Spektrum dieses Impulses,

$$\underline{X}_\perp(\omega) = \frac{\hat{x}\,\tau}{\frac{\omega\tau}{2} + \frac{\pi}{2}} \cos\frac{\omega\tau}{2}.$$

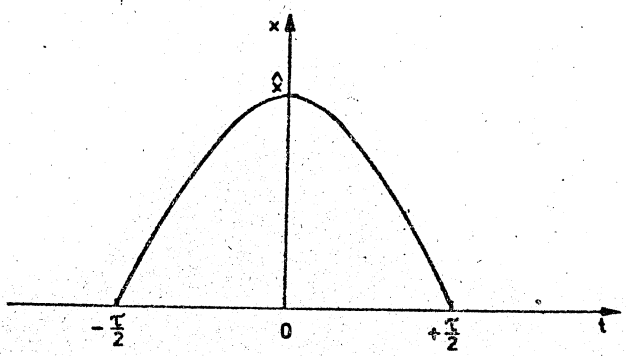


Bild A.2 Kosinushalbwellenimpuls der Dauer τ

Hat der Vierpol eine obere Grenzfrequenz f_o oder sind von der Meßaufgabe nur Frequenzanteile bis f_o von Interesse und stellen wir die Forderung, daß bis zur oberen Grenzfrequenz das Spektrum des Stoßes nur um 10 % gegenüber dem Maximalwert bei $\omega = 0$ ab-

geklungen sein soll (der ideale Stoß würde ein konstantes Spektrum haben), dann wird somit mit $\omega_o = 2\,\pi\,f_o$

$$\frac{\cos\frac{\omega_o\,\tau}{2}}{\frac{\frac{\omega_o\,\tau}{2}+\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}}}} \geqq 0{,}9\ .$$

Hieraus errechnet sich $\tau \leqq \frac{1}{20\,f_o}$.

Für einen Rechteckimpuls der Breite τ wird $\tau \leqq \frac{1}{4\,f_o}$.

Man kann die Konstanz des Spektrums des Stoßes auch meßtechnisch überprüfen.

3. Lösung spezieller Integrale in der komplexen Ebene

Linienintegrale von der Form

$$\int_{\underline{z}_1}^{\underline{z}_2} f(\underline{z})\,d\underline{z},$$

wobei $\underline{z}$ eine komplexe Größe ist, lassen sich auf zwei reelle Integrale zurückführen, wobei aber mitunter erhebliche Schwierigkeiten bei deren Lösung auftreten. Häufig können dagegen die Ausgangsintegrale in der komplexen Ebene mit Hilfe der Funktionstheorie sehr leicht gelöst werden. Es werden hier Kenntnisse der Funktionentheorie vorausgesetzt (Wunsch (1970), Smirnow (1967)), bzw. es werden hier nur einige Formeln angegeben und erläutert, die für die Lösung spezieller Integrale verwendet werden können, die in diesem Lehrgebiet eine Rolle spielen.

Wir nehmen an, das zu lösende Integral sei ein Konturenintegral, d. h., es ist über einen geschlossenen Weg in der komplexen Ebene zu erstrecken (gekennzeichnet durch $\oint$). Der Wert solcher Konturenintegrale hängt davon ab, ob der Integrand $f(\underline{z})$ innerhalb des geschlossenen Integrationsbereiches an einem oder mehreren Punkten Null oder unendlich wird. In der Nähe solcher Punkte $\underline{z}_o$ nimmt $f(\underline{z})$ die Form $(\underline{z} - \underline{z}_o)^n\,R(\underline{z})$ an, wobei $R(\underline{z})$ nicht Null, unendlich oder diskontinuierlich in der Nähe von $\underline{z}_o$ ist. Ist n nichtganz-

zahlig positiv oder negativ, dann wird $\underline{z}_0$ als Verzweigungspunkt bezeichnet. Ist n negativ ganzzahlig, bezeichnet man n als Pol.

Hat $f(\underline{z})$ einen einfachen Pol (n = 1) bei $\underline{z}_0$ und im umschlossenen Integrationsgebiet keine weiteren Verzweigungspunkte oder Pole und ist die Integrationsrichtung entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn, dann wird

$$\oint f(\underline{z})\, d\underline{z} = \oint \frac{R(\underline{z})}{\underline{z} - \underline{z}_0}\, d\underline{z} = 2\,\pi\,j\,R(\underline{z}_0)\,. \qquad (A.10)$$

$R(\underline{z}_0)$ wird als Residuum von $f(\underline{z})$ bezeichnet und ist der Funktionswert von $R(\underline{z})$ an der Stelle des Poles $\underline{z}_0$.

Beispiel 1

Es ist das Integral $\oint \frac{\underline{z}^2\, d\underline{z}}{\underline{z} - 3\,j}$ auf einem Wege zu lösen, der $\underline{z}_0 = 3\,j$ entgegen dem Uhrzeigersinn umschließt.

Es ist somit nach Gl. (A.10) $R(\underline{z}) = \underline{z}^2$, $R(\underline{z}_0) = (3\,j)^2 = -9$,

$$\oint \frac{\underline{z}^2}{\underline{z} - 3\,j}\, d\underline{z} = -18\,\pi\,j\,.$$

Umschließt $f(\underline{z})$ N Pole $\underline{z}_1, \underline{z}_2, \ldots, \underline{z}_N$ und keine weiteren Verzweigungspunkte und Pole, dann ist

$$\oint f(\underline{z})\, d\underline{z} = \frac{R(\underline{z})}{(\underline{z} - \underline{z}_1)(\underline{z} - \underline{z}_2)\ldots(\underline{z} - \underline{z}_N)}\, d\underline{z} = 2\,\pi\,j \sum_{\nu=1}^{N} R(z_\nu)\,. \qquad (A.11)$$

Beispiel 2

Es sei $f(\underline{z}) = \frac{\sin \underline{z}}{\underline{z}^2 + a^2}$, und es ist das Hüllintegral zu bilden, das beide Pole umschließt.

Es ist $f(\underline{z}) = \frac{\sin \underline{z}}{(\underline{z} - j\,a)(\underline{z} + j\,a)}$.

Pole: $\underline{z}_1 = j\,a$, $\underline{z}_2 = -j\,a$.

$$R(\underline{z}_1) = \frac{\sin j\,a}{2\,j\,a}\,, \quad R(\underline{z}_2) = \frac{\sin(-j\,a)}{-2\,j\,a} = \frac{\sin j\,a}{2\,j\,a}\,,$$

$$\oint f(\underline{z})\, dz = j\,\frac{2\pi}{a}\,\sinh a\,.$$

Wir hatten es im Abschnitt 3. mit Integralen der Form

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\underline{z})\, e^{j\underline{z}t}\, dz \qquad \text{(A.12)}$$

zu tun. Es handelt sich um keine Konturenintegrale. Der Integrationsweg erstreckt sich längs der reellen Achse von $-\infty$ bis $+\infty$. Enthält $f(\underline{z})$ keine Verzweigungspunkte oder Pole höherer Ordnung und ist ein einfacher Pol vornanden, der nicht auf der reellen Achse liegt, geht weiterhin $f(\underline{z})$ gegen Null, wenn $|\underline{z}|$ gegen unendlich geht, dann kann das Integral zu einem Konturenintegral gemacht werden, indem der Integrationsweg entlang der reellen Achse von $+\infty$ bis $-\infty$ über einen unendlich großen Halbkreis in der komplexen Ebene geschlossen wird.

Ist t größer als Null, dann wird der Wert des Integrals über den Halbkreis Null, wenn der Halbkreis die obere Hälfte der $\underline{z}$-Ebene umschließt. Denn setzt man $\underline{z} = |\underline{z}|\, e^{j\varphi} = |\underline{z}|\,(\cos\varphi + j \sin\varphi)$, dann ist wegen $\varphi = 0 \ldots \pi$ in der oberen Hälfte der $\underline{z}$-Ebene der Imaginärteil von $\underline{z}$ positiv, und es wird $e^{j\underline{z}t}$ bei großem $\underline{z}$ verschwindend klein. Das ursprüngliche Integral ändert also durch den Rückweg über den Halbkreis seinen Wert nicht.

Entsprechend kann bei negativem Wert von t verfahren werden, indem das Integral über einen Halbkreis in der unteren Hälfte der $\underline{z}$-Ebene geschlossen wird.

Aus dem Residuensatz (A.10) folgt dann für Integrale der Art (A.12):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\underline{z})\, e^{j\underline{z}t}\, d\underline{z} = \begin{cases} 2\pi j \sum \left\{ \begin{array}{l} \text{Residuen von } f(\underline{z})\, e^{j\underline{z}t} \\ \text{für alle Pole oberhalb} \\ \text{der reellen Achse} \end{array} \right\} & \text{für } t > 0 \\ -2\pi j \sum \left\{ \begin{array}{l} \text{Residuen von } f(\underline{z})\, e^{j\underline{z}t} \\ \text{für alle Pole unterhalb} \\ \text{und auf der reellen Achse} \end{array} \right\} & \text{für } t < 0 \end{cases} \qquad \text{(A.13)}$$

Das Minuszeichen vor 2 π j in der unteren Zeile (für t < 0) ergibt sich infolge der Integration im Uhrzeigersinn.

Pole auf der reellen Achse können eingeschlossen werden, indem man sie durch kleine Halbkreise in den Integrationsweg entlang der reellen Achse einbezieht.

Beispiel

Die Gewichtsfunktion für einen LR-Tiefpaß ergibt sich nach Abschnitt 3.7. aus der Fourierrücktransformation

$$g_E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R}{j\omega L + R} e^{j\omega t} \, d\omega .$$

Wir schreiben

$$g_E(t) = \frac{\frac{R}{L}}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega t}}{\omega - j\frac{R}{L}} \, d\omega .$$

Mit $\tau = \frac{L}{R}$ und $\omega_0 = \frac{j}{\tau}$ folgt aus Gl. (A.13)

$$g_E(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{für } t > 0 ,$$

$$g_E(t) = 0 \quad \text{für } t < 0 .$$

4. Einführung in die statistische Entscheidungstheorie

Wir haben einige Methoden der Signalanalyse kennengelernt. Die in der Analyse gewonnenen Merkmale werden so weiterverarbeitet, daß sie am Ende die Beschreibung des Objektes in Kategorien eines Objektmodells erlauben. In der Meßtechnik ist es häufig so, daß das Ergebnis der Analyse bereits zur Kennzeichnung des Objektes verwendet wird. Hier stimmen die Kategorien des Objektmodells mit den Merkmalen der Analyse überein. Mitunter ist es auch so, daß Teilmengen der Menge der Merkmale zu Kategorien oder Klassen zusammengefaßt werden. Zum Beispiel werden mitunter Widerstandswerte von elektrischen Widerständen in Klassen $\Delta_1 \leq \pm 1\ \%$, $\Delta_2 \leq \pm 5\ \%$, $\Delta_3 \leq \pm 10\ \%$, $\Delta_4 > \pm 10\ \%$ eingeteilt, wobei die jeweilige Klasse zulässige Abweichungen des Widerstandswertes vom Nennwert kennzeichnet. Wir wollen uns mit dieser einfachen Zuordnung von Objekten zu Objektkategorien oder -klassen hier nicht weiter beschäftigen.

Viel komplizierter ist der Fall, daß die Kategorien oder Klassen des Objektmodells ganz anderer Art sind als die Merkmale, die aus dem analysierten Signal erhalten wurden. Es kann hier häufig nur eine Aussage gemacht werden, daß auf der Grundlage des analysierten Signals das Objekt mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit der einen oder der anderen Objektklasse zugeordnet werden kann. Dieser Fall ist Gegenstand der statistischen Entscheidungstheorie, über die hier nur eine Einführung gegeben werden kann. Zum gründlichen Studium wird auf Meyer-Brötz, Schürmann (1970), Sagaruiko (1972), Fuchs, Steinhagen (1976) verwiesen.

Das Objektsignal, das durch Messungen erfaßt wird, wird durch Merkmale gekennzeichnet. Werden für die Beschreibung des Objektsignals N Merkmale x_1, x_2, x_3, ..., x_N verwendet, so kann die Menge aller Merkmale in einem Merkmalvektor x zusammengefaßt werden:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = (x_1\ x_2\ x_3\ \dots\ x_N)^T .$$

(Der Exponent T bedeutet transponiert und kennzeichnet die Umschreibung des Zeilenvektors in einen Spaltenvektor.)

Das Objekt soll im Ergebnis der Objektbeschreibung einer von K zu unterscheidenden Klassen 1, 2, 3, ..., k, ..., K des Objektmodells zugeordnet werden.

Nehmen wir als Beispiel die ärztliche Diagnose. Merkmale sind hier Blutdruck, Körpertemperatur, Pulsfrequenz, Zuckergehalt des Urins, Frequenzmerkmale oder andere Merkmale aus dem Elektrokardiogramm usf. Auf der Grundlage solcher Merkmale wird die Diagnose gestellt, die Klassen sind hier die Krankheiten. Oder ein anderes Beispiel: die Analyse des von einer Maschine erzeugten Schalles kann zur Erkennung von Schäden oder Fehlern dienen. Es können hier wieder z. B. Frequenzmerkmale ausgewählt werden, auf deren Grundlage auf bestimmte Schadenskategorien oder Fehlerkategorien geschlossen wird.

Die Entscheidung über die Klassenzugehörigkeit eines Objektes auf der Grundlage von Merkmalen, die durch Messungen oder auf eine andere Art erfaßt werden, wird häufig vom Menschen getroffen. Durch sein Kombinations- und Assoziationsvermögen ist er imstande, aus einer großen Zahl von Beobachtungen treffsichere Entscheidungen herbeizuführen. Die Entwicklung der Technik, vor allen Dingen die Entwicklung der Rechentechnik, erlaubt in immer größerem Umfang, die Entscheidungsfindung der Maschine zu übertragen. In vielen Fällen ist die automatisch getroffene Entscheidung heute schon billiger und zuverlässiger als die vom Menschen unmittelbar getroffene Entscheidung.

Wir wollen uns hier mit den Grundlagen für automatische Entscheidungen befassen.

4.1. Der optimale Klassifikator

Bei der Problematik der Klassifizierung wollen wir uns nicht für den trivialen Fall interessieren, oder wir wollen ihn nur als Sonderfall betrachten, wo eine bestimmte Merkmalkonstellation immer und ohne weiteres eine eindeutige Klassenzuordnung erlaubt. Im allgemeinen kann einer bestimmten Merkmalkonstellation, die durch den Merkmalvektor

$$\vec{x} = (x_1\ x_2\ x_3\ \dots\ x_N)^T$$

beschrieben wird, nur eine bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(k/\vec{x}), \qquad k = 1, \dots, K,$$

zugeordnet werden, daß dieses Merkmal zur Klasse k gehört. $P(k/\vec{x})$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Objekt, das durch den Merkmalvektor $\vec{x}$ beschrieben wird, zur Objektklasse k gehört.

Ein optimaler Klassifikator ordnet den Merkmalvektor $\vec{x}$ der Objektklasse zu, für die die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(k/\vec{x})$ ein Maximum aufweist (Bayes-Regel):

$$x \in \text{Klasse } k, \text{ falls } P(k/\vec{x}) > P(j/k) \text{ für } j = 1, \dots, K, \quad j \neq k. \qquad (A.14)$$

(Die Entscheidungsregel (A.14) wird häufig in der Form $P(k)\ P(\vec{x}/k) > P(j)\ P(\vec{x}/j)$ angegeben. Diese Form ist gleichwertig, denn es gilt für die Verbundwahrscheinlichkeit $P(AB) = P(B)\ P(A/B) = P(A)\ P(B/A)$.
Multipliziert man in (A.14) die linke und rechte Seite mit $P(\vec{x})$, dann sind beide Entscheidungsregeln identisch. Der Faktor $P(\vec{x})$ ist aber, da Wahrscheinlichkeiten immer positive Werte besitzen, überflüssig.)

Mitunter werden auch monotone Funktionen von $P(k/\vec{x})$, wie z. B. $\ln P(k/\vec{x})$, zur Entscheidungsfindung verwendet.

Wir wollen annehmen, die Merkmale werden in diskreten Stufen dargestellt. n sei die Zahl der Stufen des Merkmals x_ν. Dann müssen im allgemeinen Fall dem optimalen Klassifikator zur Zuordnung einer Merkmalkonstellation zu einer von K Klassen

$$m = n_1 \cdot n_2 \cdots n_N \cdot K$$

Werte von bedingten Wahrscheinlichkeiten bekannt sein.
Bei großer Klassenzahl K und der zur Erkennung dann notwendigen großen Merkmalzahl N ist die Realisierung eines optimalen Klassifikators meist nicht möglich.

Vielfach werden zur Herbeiführung einer Entscheidung noch Kosten berücksichtigt, die mit der Entscheidung oder einer Fehlentscheidung verbunden sind. Würde z. B. die Erkennung eines Brandes in einem Werk mit einer statistischen Sicherheit von nur 20 % erfolgen, die Auslösung eines falschen Alarms 2000 M kosten, die Nichterkennung eines Brandes aber mehrere Millionen M, dann wird man sich zweifellos für die Auslösung des Alarms entscheiden, obwohl in 4 von 5 Fällen Fehlalarm gegeben wird. Wir wollen uns hier nicht mit der Berücksichtigung der Kosten bei der Entscheidungsfindung befassen.

4.2. Unterscheidbare Objektbeschreibung

Wir nehmen an, daß für die Beschreibung eines Objektes $k = 1, \ldots, K$ Objektklassen existieren. Die Objektklasse k soll durch die Menge aller Merkmalvektoren $\vec{x}_k$ beschrieben werden:

$$\vec{x}_k = (x_{1k}\ x_{2k} \cdots x_{Nk})^T.$$

Für die Unterscheidbarkeit von Objektklassen wollen wir die nachfolgende Definition verwenden.

Definition

Die Menge der Objektklassen {k} heißt unterscheidbar, wenn die Bedingungen erfüllt sind:

1. der Durchschnitt $\vec{x}_k \cap \vec{x}_j = 0$ für $k \neq j$,
2. die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(\vec{x}_k/k) \geq 0{,}5$.

Die erste Bedingung sagt aus, daß der Durchschnitt der Menge aller Vektoren, die zur Klasse zugeordnet werden, und der Menge aller Vektoren, die nicht zur Klasse zugeordnet werden, gleich der Nullmenge sein soll. Das bedeutet, daß verschiedene Objektklassen im n-dimensionalen Raum keine überlappenden Beschreibungsräume bilden. Bild A.3 veranschaulicht eine solche Merkmalvektorenzuordnung bei eindeutiger Klassentrennung für einen zweidimensionalen Merkmalraum.

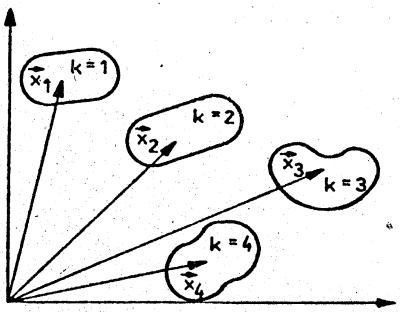


Bild A.3 Zweidimensionaler Merkmalraum mit Klassengrenzen

4.3. Fehlerwahrscheinlichkeit

Jede Erkennung kann nur mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit erfolgen. Es ergibt sich daraus die Wahrscheinlichkeit für eine Fehlentscheidung: die Fehlerwahrscheinlichkeit.

Die Fehlerwahrscheinlichkeit eines beliebigen allgemeinen Erkennungssystems ergibt sich aus dem Produkt der Wahrscheinlichkeit des Auftretens jeder Klasse und der Wahrscheinlichkeit, daß bei Klassenzugehörigkeit des Objektes der dieses beschreibende Merkmalvektor nicht zur Klasse zuzuordnen ist:

$$P(\varepsilon) = \sum_k P(k) \sum_{j \neq k} P(\vec{x}_j/k) \ ,$$

$P(\varepsilon)$ Fehlerwahrscheinlichkeit,

$P(k)$ Wahrscheinlichkeit, daß ein beliebiges Objekt unter Nichtbeachtung seiner Merkmale zur Objektklasse k gehört,

$P(\vec{x}_j/k)$ Wahrscheinlichkeit, daß ein Objekt, das zur Klasse k gehört, der Klasse j zugeordnet wird.

Mit

$$\sum_{j \neq k} P(\vec{x}_j/k) + \sum_k P(\vec{x}_k/k) = 1$$

wird

$$P(\varepsilon) = \sum_k P(k) \left[1 - P(\vec{x}_k/k)\right] ,$$

$$P(\varepsilon) = \sum_k P(k) \ \varepsilon_k \ .$$

Bei gleicher Auftretenswahrscheinlichkeit $P(k)$ aller Objektklassen $\varepsilon_k = \text{konst.} = \varepsilon$ wird

$$P(\varepsilon) = \varepsilon \ .$$

$P(\varepsilon)$ wird nur vom optimalen Klassifikator erreicht; jeder reale Klassifikator hat eine Fehlerwahrscheinlichkeit

$$P_{ges} > P(\varepsilon) \ .$$

4.4. Lineare Klassifikation

Wie schon erwähnt wurde, können optimale Klassifikatoren meist nicht realisiert werden, weil der Rechen- und Speicheraufwand bei hoher Klassen- und Merkmalzahl zu groß werden würde. Es werden deshalb Verfahren angewandt, die bei vertretbarem Aufwand brauchbare Entscheidungskriterien liefern. An dieser Stelle können nur zwei einfache Verfahren angegeben werden.

Bei allen Klassifikatoren ist, bevor sie für die eigentliche Erkennungsaufgabe genutzt werden können, ein "Anlernen" des Klassifikators erforderlich. Der Klassifikator erhält hierbei Stichproben von Objekten, deren Klassenzugehörigkeit und Merkmalvektor bekannt sind und die in den Klassifikator eingegeben werden, damit die für den Entscheidungsalgorithmus erforderlichen Konstanten bestimmt werden können.

4.4.1. Klassifizierung durch Abstandsmessung

Ein unbekanntes, durch den Merkmalvektor $\vec{x} = (x_1\ x_2\ x_3\ \dots\ x_N)^T$ beschriebenes Objekt wird der Klasse k zugeordnet, zu deren Bezugspunkt $\vec{\mu}_k$ es den kleinsten Abstand hat.

Wir wählen als Bezugspunkt den Klassenschwerpunkt, der durch den bedingten Erwartungswert

$$\vec{\mu}_k = E[(\vec{x}/k)] = E_k[\vec{x}]$$

bestimmt wird. Als Abstand des Merkmalvektors vom Klassenschwerpunkt k definieren wir den euklidischen Abstand a_k, und es ist

$$a_k^2 = \sum_{j=1}^{N} (x_j - \mu_{jk})^2 = (\vec{x} - \vec{\mu}_k)^T\ (\vec{x} - \vec{\mu}_k)\ .$$

Spalten wir die Summe auf, dann wird

$$a_k^2 = \sum_{j=1}^{N} x_j^2 - 2 \sum_{j=1}^{N} \mu_{jk}\ x_j + \sum_{j=1}^{N} \mu_{jk}^2\ .$$

Der erste Term auf der rechten Seite dieser Gleichung ist unabhängig von der Klassenzugehörigkeit, somit also für eine Entscheidungsfindung über die Klassenzugehörigkeit ohne Bedeutung und kann fortgelassen werden. Als Bewertungsmaß erhält man dann

$$d_k = \sum_{j=1}^{N} \mu_{jk}^2 - 2 \sum_{j=1}^{N} \mu_{jk}\ x_j$$

oder, in Matrizenschreibweise,

$$d_k = \vec{w}_k^{\,T} \vec{x} + w_{0k}$$

mit

$$\vec{w}_k = -2\,\vec{\mu}_k \text{ und } w_{0k} = \sum_{j=1}^{N} \mu_{jk}^2 \,.$$

Die Entscheidung über die Klassenzugehörigkeit wird dann nach dem kleinsten Bewertungsmaß d_k getroffen:

Zugehörigkeit zur Klasse k für $d_k \leqq d_j$, $\quad j = 1, \ldots, N$, $\quad j \neq k$.

Da d_k eine lineare Funktion von $\vec{x}$ ist, sprechen wir von einem linearen Klassifikator.

Die Trennebene zwischen zwei Klassen k und i erhält man aus $d_k - d_i = 0$:

$$\vec{w}_T^{\,T} \vec{x} + w_{0T} = 0 \qquad \text{(A.15)}$$

mit

$$\vec{w}_T = \vec{\mu}_k - \vec{\mu}_i \text{ und } w_{0T} = -\frac{1}{2} (\vec{\mu}_k - \vec{\mu}_i)^T (\vec{\mu}_k + \vec{\mu}_i).$$

Gl. (A.15) ist die Gleichung einer verallgemeinerten Ebene, einer Hyperebene, die im dreidimensionalen Merkmalraum die Gestalt einer Ebene besitzt, wie sie im allgemeinen Sprachgebrauch verstanden wird.

Für einen zweidimensionalen Merkmalvektor $\vec{x} = (x_1\ x_2)^T$ hat nach Bild A.4 die Trennebene die Gestalt einer Geraden, die senkrecht auf der Mitte der Verbindungslinie der Schwerpunktvektoren der zwei Klassen $\vec{\mu}_k$ und $\vec{\mu}_i$ steht. Entsprechendes gilt für Merkmalräume mit höheren Dimensionen.

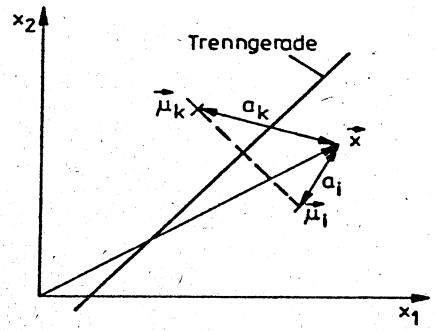


Bild A.4 Trenngerade mit zweidimensionalem Merkmalraum

Beispiel

(Das Beispiel ist Meyer-Brötz, Schürmann (1970) entnommen)

Es liegen zwei Klassen 1 und 2 mit gleicher Auftretenswahrscheinlichkeit $P_1 = P_2 = 0{,}5$ und zwei Merkmale x_1 und x_2 vor. Als Stichproben liegen aus Klasse 1 die Merkmalvektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3-\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 3+\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

und aus Klasse 2 die Merkmalvektoren

$$\begin{pmatrix} 5-3\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ +\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5+3\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

vor (Bild A.5).

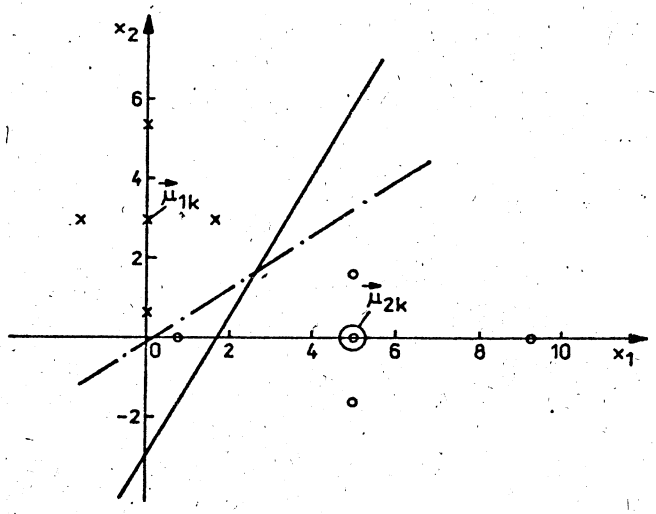


Bild A.5 Stichproben, Schwerpunktvektoren und Trenngeraden für das Beispiel

———— Trenngerade mit kleinstem euklidischen Abstand zu den Schwerpunkten nach Abschnitt 4.4.1.

—·——·— Trenngerade aus linearer Regression nach Abschnitt 4.4.2.

Die Rechnung ergibt für die Schwerpunktvektoren

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Weiter wird

$$\vec{w}_T = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}; \qquad w_{0T} = 8 .$$

Damit ergibt sich nach Gl. (A.15) die Trenngerade

$$-5\, x_1 + 3\, x_2 + 8 = 0 .$$

Die Trenngerade ist, ebenso wie die Schwerpunkte, in Bild A.5 eingezeichnet.

Das Klassifizierungsverfahren durch Messung des Abstands von den Klassenschwerpunkten hat den Nachteil, daß es weder die Auftretenswahrscheinlichkeit der Klassen noch die Lage der Stichproben zu den Klassenschwerpunkten beachtet. So ergibt sich dann auch für das Beispiel, daß ein Objekt mit dem Merkmal $x_1 = 5 - 3\sqrt{2}$, $x_2 = 0$, das ja zur Klasse 2 gehört, als zur Klasse 1 gehörig erkannt werden würde.

4.4.2. Regressionsanalyse

Es wird hier nur eine komprimierte Darstellung ohne mathematische Beweisführung gegeben. Ausführlich findet man das Verfahren bei Fisz (1966) und, auf die Problematik der Zeichenerkennung zugeschnitten, in Meyer-Brötz, Schürmann (1970) dargestellt.

4.4.2.1. Einführung

Wir gehen von zwei Zufallsvariablen z und x aus. Wir nehmen an, es liegt eine große Zahl von Einzelbeobachtungen vor, die etwa nach Bild A.6 zusammengestellt werden können. Jeder Punkt stellt hierbei das Ergebnis einer Beobachtung dar.

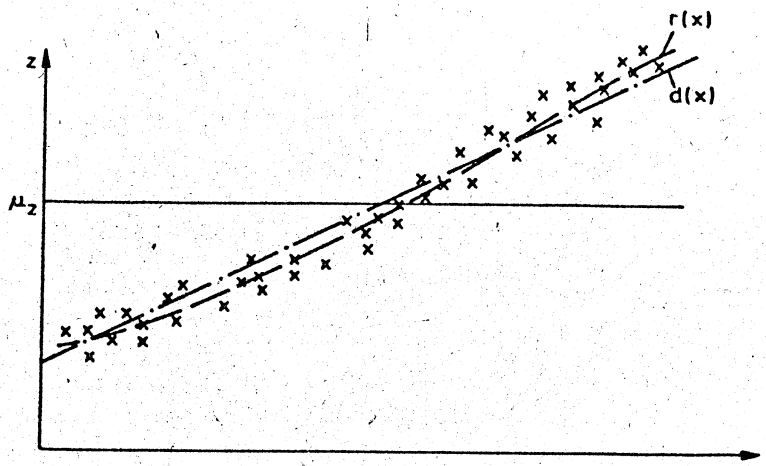


Bild A.6 Schematische Darstellung von Beobachtungen und Prognosefunktionen μ_z, r(x) und d(x)

Wollte man einen Wert von z voraussagen, so könnte man hierfür den Erwartungswert

$$\mu_z = E[z] = \sum z\, P(z)$$

wählen.

Bei kontinuierlicher Verteilung wäre

$$\mu_z = E[z] = \int_z z\, p(z)\, dz.$$

Aus den Einzelbeobachtungen nach Bild A.6 könnte der Erwartungswert leicht als der arithmetische Mittelwert

$$\mu_z = \bar{z}$$

bestimmt werden.

Es ist aber bei Betrachtung des Bildes naheliegend, einen Zusammenhang zwischen z und x anzunehmen. Die Voraussage der Größe von z unter der Bedingung x erfolgt im Sinne der Minimierung des Abstandsquadrates am besten durch die Regressionsfunktion, das ist der Erwartungswert von z unter der Bedingung des Auftretens von x:

$$r(x) = E[z/x)] = \sum z\, P(z/x)$$

bzw. $$r(x) = E[z/x)] = \int_z z\, p(z/x)\, dx\ .$$

r(x) ist die Funktion, für die die Summe der Quadrate aller Abstände der Einzelbeobachtungen zum Minimum wird.

Im ersten Fall, d. h. bei Voraussage des Wertes von z durch $\mu_z = E[z]$, ergibt sich ein Restfehler

$$R_\mu = \sigma_z^2 = E\left[(z - \mu_z)^2\right],$$

der im Beispiel nach Bild A.6 sehr groß wäre.

Für die Regressionsfunktion wird der Restfehler

$$R_r = E\left[(z - r)^2\right] = \sigma_z^2 - \sigma_r^2,$$

wobei

$$\sigma_r^2 = E\left[(r - \mu_z)^2\right] .$$

Nehmen wir zum Beispiel an, in einem Produktionsbetrieb werden an Arbeitern in verschiedenen Zeitabschnitten vom Arbeitsbeginn an die Hörschwellenverschiebungen (HV = z) gemessen, die infolge Lärmeinwirkung entstehen. Der Mittelwert aller Hörschwellenverschiebungen sei μ_z. Dann ist R die mittlere quadratische Abweichung aller für die Auswertung herangezogenen Meßwerte von ihrem Mittelwert. Dabei wird die Abhängigkeit der Hörschwellenverschiebung von der Expositionszeit (x = t) nicht beachtet. Die Regressionsfunktion r(x) stellt in diesem Fall die mittlere Hörschwellenverschiebung als Funktion der Expositonszeit dar.

R_r ist dann die mittlere quadratische Abweichung der Meßwerte von dieser Regressionsfunktion.

Man kann noch eine lineare Approximation der Regressionsfunktion vornehmen:

$$d(x) = w_0 + w_1 x .$$

Die Approximation kann man wieder im quadratischen Mittel vornehmen. Es wird dann

$$w_0 = \mu_z - \frac{\sigma_z^2}{\sigma_{xz}^2} \mu_x ; \quad w_1 = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_{xz}^2}$$

mit

$$\mu_z = E[z] ; \ \mu_x = E[x] ; \ \sigma_z^2 = E\left[(z - \mu_z)^2\right] ;$$

$$\sigma_{xz}^2 = E\left[(x - \mu_x)(z - \mu_z)\right] ; \ \sigma_x^2 = E\left[(x - \mu_x)^2\right] .$$

Im Bild A.6 sind die Regressionsfunktion r(x) und ihre lineare Approximation d(x) eingezeichnet.

4.4.2.2. Lineare Regression bei mehrdimensionalen Merkmalvektoren

Bei zahlreichen Erkennungsaufgaben liegen den Beobachtungen eine Reihe von Merkmalen zugrunde, die durch den Merkmalvektor

$$\vec{x} = (x_1\ x_2\ \dots\ x_N)^T$$

dargestellt werden können.

Die für jede Klasse k zu bestimmende Regressionsfunktion $r_k(x) = r(x_1, x_2, \dots, x_N)$ ist dann eine Funktion von N Veränderlichen. Für die sog. Zielgröße z treffen wir folgende willkürliche Festlegung:

$$z_k = \begin{cases} 1 & \text{für } \vec{x} \in \text{Klasse k,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad \text{(A.16)}$$

Wir hätten jede andere Festlegung treffen können. Es muß sich nur der Wert der Zielgröße z_k bei Zugehörigkeit von Merkmalvektoren zur Klasse k unterscheiden von dem Wert bei Zugehörigkeit zu anderen Klassen. Die Entscheidungsregeln können dann aber sehr umständlich werden.

Die Zielgröße z_k jeder Klasse wird im Sinne der Minimierung quadratischer Abstände am besten durch die Regressionsfunktion

$$r_k(\vec{x}) = E\left[z_k/\vec{x}\right]$$

angenähert. Es läßt sich zeigen, daß die Regressionsfunktion unter Beachtung unserer Festlegung (A.16) übereinstimmt mit der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(z_k/\vec{x}) = P(k/\vec{x})$,

$$r_k(\vec{x}) = P(k/\vec{x}) ,$$

so daß sie unmittelbar für die Entscheidungsfindung verwendet werden könnte. Da $P(k/\vec{x})$ in der Praxis meist nicht bestimmt werden kann, ist das somit auch nicht für $r_k(\vec{x})$ möglich. Es wird deshalb wieder eine lineare Approximation verwendet:

$$d_k(\vec{x}) = w_{0k} + w_{1k}\,x_1 + w_{2k}\,x_2 + \dots + w_{Nk}\,x_N \,. \qquad \text{(A.17)}$$

$d_k(\vec{x})$ ist die Funktion mit linearer Abhängigkeit der Merkmale, die unter Berücksichtigung aller den verschiedenen Klassen zugeordneten Beobachtungen (die durch ihre Merkmalvektoren charakterisiert werden), im Sinne der Minimierung der Abstandsquadrate, am besten den Wert 1, bei Zugehörigkeit des Merkmalvektors zur Klasse k, oder den Wert 0, wenn die Merkmalvektoren nicht zur Klasse k gehören, ergibt.

Die Entscheidungsregel auf der Grundlage der Schätzfunktion $d_k(\vec{x})$, der besten in den Merkmalen $x_1, \ldots, x_N$ linearen Näherung der Regressionsfunktion, lautet dann

$\vec{x} \in$ Klasse k, wenn

$$d_k(\vec{x}) \geq d_j(\vec{x}) \text{ für alle } j \neq k ,$$

d. h., ein Objekt wird der Klasse zugeordnet, für die die aus den Komponenten seines Merkmalvektors bestimmte Schätzfunktion den größten Wert besitzt.

Für K Klassen und N Merkmale können wir die Koeffizienten w in einer Matrix mit N + 1 Zeilen und K Spalten zusammenfassen:

$$\vec{W} = \begin{pmatrix} w_{01} & w_{02} & \cdots & w_{0K} \\ w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{N1} & w_{N2} & & w_{NK} \end{pmatrix} .$$

Es sei s_{ij} der Erwartungswert der Merkmalkomponente x_i unter der Bedingung der Zugehörigkeit zur Klasse z_j:

$$s_{ij} = E[x_i/z_j] .$$

Wird nun noch der Merkmalvektor x um eine Komponente $x_0 = 1$ erweitert,

$$x = (x_0\ x_1\ x_2 \ldots x_N)^T ,$$

dann kann man die s_{ij} in der Streumatrix $\vec{S}$ zusammenfassen:

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} s_{01} & s_{02} & \cdots & s_{0K} \\ s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{N1} & s_{N2} & \cdots & s_{NK} \end{pmatrix} .$$

Es ist weiter

$$m_{ij} = E[x_i\ x_j] ,$$

dann ergibt sich die Momentenmatrix

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & \cdots & m_{0N} \\ m_{10} & m_{11} & \cdots & m_{1N} \\ \vdots & & & \vdots \\ m_{N0} & m_{N1} & \cdots & m_{NN} \end{pmatrix} = E[x\, x^T] \; .$$

Es ist dann

$$\vec{M}\,\vec{W} = \vec{S}$$

oder

$$\vec{W} = \vec{M}^{-1}\,\vec{S}. \qquad \text{(A.18)}$$

Mit Gl. (A.18) können die Koeffizienten w in Gl. (A.17) bestimmt werden. Bei Meyer-Brötz, Schürmann (1970) sind Rechenschemata zur vereinfachten Berechnung der Gl. (A.18) angegeben.

Für das Beispiel im Abschnitt 4.4.1. wird

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} ; \quad \vec{M} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{35}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{13}{2} \end{pmatrix} ; \quad |M| = \frac{135}{4} ,$$

$$\vec{M}^{-1} = \frac{4}{135} \begin{pmatrix} \frac{455}{4} & \frac{-65}{4} & \frac{-105}{4} \\ \frac{-65}{4} & \frac{17}{4} & \frac{15}{4} \\ \frac{-105}{4} & \frac{15}{4} & \frac{45}{4} \end{pmatrix} ; \quad \vec{W} = \vec{M}^{-1}\,\vec{S} = \begin{pmatrix} \frac{14}{27} & \frac{13}{27} \\ \frac{-2}{27} & \frac{2}{27} \\ \frac{1}{9} & \frac{-1}{9} \end{pmatrix} .$$

Somit ergibt sich für die der Klasse 1 zugeordnete Regressionsfunktion

$$d_1(x) = \frac{14}{27} - \frac{2}{27}\, x_1 + \frac{1}{9}\, x_2$$

und für die der Klasse 2 zugeordnete Regressionsfunktion

$$d_2(x) = \frac{13}{27} + \frac{2}{27}\, x_1 - \frac{1}{9}\, x_2 \; .$$

Für die Entscheidungsgrenze ist $d_1 = d_2$ zu setzen.
Man erhält

$$-x_1 + \frac{3}{2}\, x_2 + \frac{1}{4} = 0 \; .$$

Diese Entscheidungsgrenze ist im Bild A.6 strichpunktiert eingezeichnet. Für alle Merkmalvektoren, die oberhalb dieser Geraden liegen, ist dann, unter Zugrundelegung linearer Regression, die Entscheidung "zugehörig zur Klasse 1" und entsprechend für alle Merkmalvektoren unterhalb dieser Geraden die Entscheidung "zugehörig zur Klasse 2" zu treffen.

Literatur

Andrews, H.; Caspari, K. L. — A generalized technique for spectral analysis. IEEE Transactions on Computers, Jan. 1970, S. 16 - 25.

Barnick, W.; Schommartz, G.; Wendt, G. — Hydroakustik. In: Taschenbuch Akustik. VEB Verlag Technik, Berlin 1984.

Bendat, J. S. — The Hilbert Transform and Applications to Correlation Measurements. Brüel & Kjaer, Firmenschrift.

Biering, H.; Pedersen, O. Z. — System analysis and time delay spectrometrie (Part I). Technical Review (Brüel & Kjaer) 1983, No. 1.

Davenport, W. B.; Johnson, R. A.; Middleton, D. — Statistical errors in measurements on random time functions. Journ. of Appl. Phys., Vol. 23, Numb. 4, April 1952.

Fey, P. — Die Hilberttransformation in der Elektrotechnik. Nachrichtentechnik 6, 1956, S. 337 - 340.

Fisz, M. — Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1966.

Fritzsche, G. — Signale und Funktionaltransformationen. Reihe Informationselektronik. VEB Verlag Technik, Berlin 1985.

Fritzsche, G. — Theoretische Grundlagen der Nachrichtentechnik. VEB Verlag Technik, Berlin 1983.

Frühauf, U. — Grundlagen der elektronischen Meßtechnik. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig 1977.

Fuchs, S.; Steinhagen, H.-E. — Objekterkennung. Einführung in die mathematischen Methoden der Zeichenerkennung. VEB Verlag Technik, Berlin 1976.

Giloi, W. — Digitale Signalverarbeitung. In: Taschenbuch der Informatik, Bd. 3. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1974.

Glassmann, J. A. — A generalization of the fast-fourier-transform. IEEE Transactions on Computers, Febr. 1970, S. 105 - 111.

Haar, A. — Zur Theorie der orthogonalen Funktionssysteme. Math. Annalen 69, 1910, S. 331 - 371.

Harthmuth, H. — Transmission of information by orthogonal functions. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

Jeske, W.; Beckmann, T. — Grundlagen der analogen und digitalen Signalanalyse. In: Taschenbuch Akustik. VEB Verlag Technik, Berlin 1984.

Klein, W. — Finite Systemtheorie. Teubner Verlag, Stuttgart 1976.

Kreß, D. — Theoretische Grundlagen der Signal- und Informationsübertragung. Akademie Verlag, Berlin 1977.

Lange, F. H. — Signale und Systeme. Bd. 3, Regellose Vorgänge. VEB Verlag Technik, Berlin 1973.

Markel, J. D.; Gray, Jr., A. M. — Linear prediction of speech. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.

Meyer-Brötz, G.; Schürmann, J. — Methoden der automatischen Zeichenerkennung. Akademie Verlag, Berlin 1970.

Naumburger, — LPC - Eine Signaltransformation für die Digitaltechnik. In: Angewandte Akustik. VEB Verlag Technik, Berlin 1987.

Noll, M. — Cepstrum pitch determination. Journ. Acoust. Soc. Am., Vol. 41. 1967, S. 293 - 309.

Rabiner, L. R.; Gold, B. — Theory and application of digital signal processing. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, Inc., New Jersey 1977.

Randall, R. B.; Hee, J. — Cepstrum analysis. Technical Review (Brüel & Kjaer) 1981, No. 3.

Rice, S. O. — Mathematical analysis of random noise. In: Selected papers on noise and stochastic processes. Herausg.: Wax, N. Dover Publications, Inc., New York 1954.

Roth, O. — Digital filters in acoustic analysis systems. Technical Review (Brüel & Kjaer) 1977, No. 1.

Sagoruiko, N. T. — Metody rasposnawanija i ich primenije. Sowjetskoje Radio, Moskwa: 1972.

Schlitt, H. — Systemtheorie für regellose Vorgänge. Springer Verlag, Göttingen, Heidelberg, Berlin, 1970.

Schlitt, H. — Stochastische Vorgänge in linearen und nichtlinearen Regelkreisen. VEB Verlag Technik, Berlin 1968.

Seidler, J. — Optimierung informationsübertragender Systeme, Bd. 1, Grundlagen der statistischen Optimierung. VEB Verlag Technik, Berlin 1971.

Sickert, K. — Automatische Spracheingabe und Sprachausgabe. Verlag Markt & Technik, Haar bei München, 1983.

Smirnow, W. I. — Lehrgang der höheren Mathematik. VEB Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967.

Stearns, S. D. — Digitale Verarbeitung analoger Signale. R. Oldenburg Verlag, Wien 1979.

Storm, R. Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik und statistische Qualitätskontrolle (Mathematik für Ingenieure). VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1967.

Thrane, N. The discrete Fourier Transform and FFT analysers. Technical Review (Brüel & Kjaer) 1979, No. 1.

Thrane, N. The Hilbert Transform. Technical Review (Brüel & Kjaer) 1984, Nr. 3.

Unbehauen, N. Systemtheorie. Akademie Verlag, Berlin 1980.

Weber, E. Grundriß der biologischen Statistik. VEB Gustav Fischer Verlag, Jena 1967.

Wilfert, H.-H. Signal- und Frequenzanalyse an stark gestörten Systemen. VEB Verlag Technik, Berlin 1969.

Woschni, E.-G. Informationstechnik. VEB Verlag Technik, Berlin 1981.

Wunsch, G. Systemanalyse, Bd. 1 bis 3. VEB Verlag Technik, Berlin ab 1969.